

- نريد مقارنة الطرق المختلفة للتوفير بفائدة مركبة لذلك نودع مبلغ 10.000 DA في بنك بنسبة سنوية 5% خلال 5 سنوات.
- (1) كم يصبح رصيده خلال هذه المدة ؟
- (2-1) إذا كان الرصيد يزيد كل سنة أشهر بنسبة سنوية x احسب x ثم حدد رصيده خلال نفس الفترة.
- (ب) اجب عن السؤال (1) من أجل تدخير فلاني الأشهر، شهري، يومي.
- مع العلم أنه إذا كانت x هي النسبة المئوية السنوية فإن النسبة الشهرية المكافئة لها هي x^n حيث $(1+x^n)^{12} = 1+x$

5

الدرس

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

ملخص

رأينا في درس النالة الأسية أن المعادلة $e^x = m$ مع $m > 0$ لها حل وحيد على \mathbb{R} ، هذا الحل نرمزنا له بـ $\ln(m)$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m ، العدد $\ln(m)$ يمثل العدد الحقيقي الذي صورته m بالدالة \exp عندئذ نستطيع أن نعرف على المجال $]0, +\infty[$ الدالة $m \mapsto \ln(m)$ التي



نرمز لها بصفة عامة $x \mapsto \ln(x)$.
و التي تسمى بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية و نرمز لها بـ \ln .
الدالة اللوغاريتمية النيبيرية هي الدالة العكسية للدالة \exp والعكس صحيح.

1 - الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1-1 تعريف

- نسمي لوغاريتم نيبيري لعدد حقيقي موجب تماما m ، الحل الوحيد للمعادلة $e^x = m$ ذات المجهول x ونرمز لهذا الحل بالرمز $\ln(m)$ و يقرأ " اللوغاريتم النيبيري لـ m ".

- الدالة اللوغاريتمية النبرية هي الدالة التي ترقق بكل عدد حقيقي موجب تماما x العدد الحقيقي $\ln(x)$ و نكتب $x \mapsto \ln(x)$

نتيجة

(1) من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x و y لدينا:

$$\ln(x) = y \text{ يكافئ } x = e^y$$

(2) $e^0 = 1$ يكافئ $\ln(1) = 0$ و $e^1 = e$ يكافئ $\ln(e) = 1$

(3) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\ln(e^x) = x$

ومن أجل كل $x > 0$ لدينا $\exp(\ln(x)) = x$

2-1 خواص

(1) الدالة \ln معرفة ومستمرة على $]0, +\infty[$

(2) الدالة \ln قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ و $\ln(1+h) \approx h$ و $\ln(x) = \frac{1}{x}$

يكون h بجوار الصفر.

(3) الدالة \ln متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ ومنه نستنتج ما يلي

$$x > 0 \text{ يكافئ } \ln(x) < 0$$

$$x > 1 \text{ يكافئ } \ln(x) > 0$$

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b :

$$a = b \text{ يكافئ } \ln(a) = \ln(b)$$

$$a < b \text{ يكافئ } \ln(a) < \ln(b)$$

الإثبات

(1) نقبل أن الدالة \ln مستمرة على $]0, +\infty[$

(2) ليكن a عدد حقيقي موجب تماما.

تكون الدالة \ln قابلة للاشتقاق عند العدد a إذا وفقط إذا كانت نهاية النسبة

$$\frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} \text{ لا يؤول إلى } a \text{ تساوي عدد حقيقي.}$$

$$\text{نضع } f(x) = \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} \text{ مع } x \neq a.$$

نضع $\ln(x) = X$ و $\ln(a) = A$ و عليه $x \rightarrow a$ فإن $X \rightarrow A$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{X \rightarrow A} \frac{X - A}{e^X - e^A} = \lim_{X \rightarrow A} \frac{1}{e^X - e^A} = \frac{1}{e^A} = \frac{1}{a}$$

الدالة اللوغاريتمية النبرية

لأن الدالة \ln قابلة للاشتقاق عند a و عددتها المشتق هو $\frac{1}{a}$

و عليه من أجل كل $x > 0$ يكون $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$\ln(1+h) \approx \ln(1) + h \times \ln'(1) \approx h$$

$$\ln(1) = 0 \text{ و } \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

(3) بما أنه من أجل كل $x > 0$ لدينا $\frac{1}{x} > 0$

فإن الدالة \ln متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

بما أن $\ln(1) = 0$ فإن من أجل $x \in]0, 1[$ يكون $\ln(x) < 0$

و من أجل $x > 1$ يكون $\ln(x) > 0$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $\ln(x)$		+	+
تغيرات \ln			

تمرين تدريبي

عين في كل حالة من الحالات التالية المجموعة التي ينتمي إليها x بحيث العبارات العطاء ذات معنى.

$$(1) \ln(-x), \ln(x^2), \ln(x-2) \text{ (ج)}$$

$$(2) \ln\left(\frac{x}{x+1}\right), \ln|x+1|, \ln|x^2-3x+2| \text{ (و)}$$

✓ الحل

بما أن الدالة \ln معرفة على $]0, +\infty[$ فإن إلا الأعداد الموجبة تماما التي لها لوغاريتم.

(1) العبارة $\ln(-x)$ لها معنى إذا وفقط إذا $-x > 0$ أي $x < 0$.

(2) العبارة $\ln(x^2)$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $x^2 > 0$ أي $x \neq 0$ و عليه $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(3) العبارة $\ln(x-2)$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $x-2 > 0$ أي $x > 2$ و عليه $x \in]2, +\infty[$.

(4) العبارة $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $\frac{x}{x+1} > 0$ و $x+1 \neq 0$

$$\text{أي } x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

(5) العبارة $\ln|x+1|$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $|x+1| > 0$ أي $x+1 \neq 0$

وهذا يعني أن $x \neq -1$ و منه $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(6) العبارة $\ln|x^2-3x+2|$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $|x^2-3x+2| > 0$ أي $x^2-3x+2 \neq 0$

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

$$(x \neq 1) \text{ و } (x \neq 2)$$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي

$$\mathbb{R} - \{1, 2\}$$

تمرين تدريبي 2

حل في \mathbb{R} المعادلات والمترجمات التالية:

$$\text{(1) } \ln(x^2 + 2) = \ln(3x) \quad \text{(2) } \ln(x^2 + 2) \geq \ln(3x)$$

$$\text{(3) } 3(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 1 = 0 \quad \text{(4) } 3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$$

✓ الحل

- لحل المعادلة $\ln V(x) = \ln U(x)$ نجد E مجموعة الأعداد x بحيث $U(x) > 0$ و $V(x) > 0$ ثم نحل في \mathbb{R} المعادلة $V(x) = U(x)$ ولا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى E .

- لحل المترجمة $\ln V(x) \leq \ln U(x)$ نجد E مجموعة الأعداد x بحيث $U(x) > 0$ و $V(x) > 0$ ثم نحل المترجمة $V(x) \leq U(x)$ ولا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى E .

(1) من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $x^2 + 2 > 0$

$3x > 0$ يكافئ $x > 0$ ومنه المجموعة E هي $]0, +\infty[$

نضع $U(x) = 3x$ و $V(x) = x^2 + 2$

$V(x) = U(x)$ يكافئ $x^2 - 3x + 2 = 0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=2)$

بما أن 1 و 2 ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S = \{1, 2\}$.

(2) المجموعة E هي $]0, +\infty[$.

$V(x) \geq U(x)$ يكافئ $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

لكي يكون $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ يجب أن يكون $x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ ومنه مجموعة حلول المترجمة (2) هي:

$$S = (]0, +\infty[) \cap (]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[) =]0, 1] \cup [2, +\infty[$$

$$\text{(3) } 3(\ln x)^2 - 2\ln(x) - 1 = 0 \quad (*)$$

المجموعة المرجعية E هي $]0, +\infty[$.

بوضع $\ln(x) = X$ للمعادلة (*) تصبح $3X^2 - 2X - 1 = 0$ وهذه الأخيرة لها حلان هما 1 و $-\frac{1}{3}$

$$\ln(x) = 1 \text{ يكافئ } x = e$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{3} \text{ يكافئ } x = e^{-\frac{1}{3}}$$

بما أن e و $e^{-\frac{1}{3}}$ ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (*) هي $S = \{e, e^{-\frac{1}{3}}\}$

(4) المجموعة المرجعية E للمعادلة $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ هي \mathbb{R} .

بوضع $e^x = X$ فإن المعادلة (4) تصبح $3X^2 - 2X - 1 = 0$ وهذه الأخيرة لها حلان 1 و $-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}$ مرفوض لأن $X > 0$ والحل 1 مقبول.

$$e^x = 1 \text{ يكافئ } x = \ln(1) = 0$$

إذن مجموعة حلول المعادلة (4) هي $S = \{0\}$.

2 - الخاصية الأساسية ونتائجها

1 - 2 الخاصية الأساسية

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b يكون $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

الإثبات

$$\text{لدينا } e^{\ln(a \times b)} = a \times b \quad (1)$$

$$e^{\ln(a) + \ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$ وبما أن الدالة \exp تقابل فإنه ينتج

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

2 - 2 نتائج

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b ومن أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n لدينا:

$$\ln(a^n) = n \ln(a) \quad (3) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad (2) \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \quad (1)$$

$$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a) \quad (5) \quad \ln(a^{-n}) = -n \ln(a) \quad (4)$$

الإثبات

$$\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \quad (1)$$

$$\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(1) = 0 \quad (2)$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ نجد (2) و (1) من}$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \quad (2)$$

$$= \ln(a) - \ln(b)$$

(3) نبرهن على صحة المساواة بالتراجع على n :

نسمي الخاصية " $\ln(a^n) = n \ln(a)$ "

P_1 صحيحة لأن $\ln(a^1) = \ln(a)$

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $\ln(a^n) = n \ln(a)$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $\ln(a^{n+1}) = (n+1) \ln(a)$

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n+1) \ln(a)$$

منه P_{n+1} صحيحة وبالتالي P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n .

$$\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) \quad (4)$$

$$= -\ln(a^n) = -n \ln(a)$$

(5) لدينا $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ومنه ينتج $\ln\left((\sqrt[n]{a})^n\right) = \ln(a)$ وبتطبيق نتيجة (3) نجد

$$n \ln(\sqrt[n]{a}) = \ln(a) \quad \text{نجد } \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$$

ملاحظة

إذا كان a و b عددين حقيقيين سالبين تماماً فإن $ab > 0$ وبالتالي نكتب

$$\ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|) \quad \text{و} \quad ab = |ab| = |a||b|$$

مرهنة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وبحيث $f(ab) = f(a) + f(b)$ فإن

الدالة f هي من الشكل $k \cdot \ln$.

وإذا اضيف الشرط $f(e) = 1$ فإن f هي الدالة \ln .

الإثبات

- لدينا $f(a \times 1) = f(a) + f(1)$ منه نجد $f(1) = 0$

- لنعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = f(ax) - f(x)$ مع $a > 0$

من أجل كل $x > 0$ لدينا $g(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$.

إذن الدالة g ثابتة.

وبما أن g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و $g'(x) = a f'(ax) - f'(x)$ و $g'(x) = 0$

بنتج $a f'(ax) = f'(x)$.

من أجل $x=1$ نجد $a f'(a) = f'(1)$

وإذا وضعنا $f'(1) = k$ فإن $f'(a) = \frac{k}{a}$

إذن من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $f'(x) = \frac{k}{x}$.

- نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x) = f(x) - k \ln(x)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $h'(x) = f'(x) - \frac{k}{x} = \frac{k}{x} - \frac{k}{x} = 0$.

إذن الدالة h ثابتة على المجال $]0, +\infty[$

و من أجل كل $x > 0$ لدينا $h(x) = h(1) = f(1) = 0$ إذن $f(x) = k \ln(x)$.

بما أن $f(e) = k \ln(e) = k$ و $f(e) = 1$ فإن $k=1$ وبالتالي $f(x) = \ln(x)$.

تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية $A = \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1)$

$$B = \ln(\sqrt{2}+1)^3 + \ln(\sqrt{2}-1)^3 \quad C = \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

الحل

$$A = \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) = \ln((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)) = \ln((\sqrt{2})^2 - 1^2) = \ln(1) = 0$$

$$B = 3 \ln(\sqrt{2}+1) + 3 \ln(\sqrt{2}-1) = 3(\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1)) = 3A = 0$$

$$C = \ln\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}\right) = \ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{1}\right) = 2 \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

تمرين تدريبي 2

حل المعادلات والمراجحات التالية في \mathbb{R} .

$$\ln(x+4) + \ln(x+2) = \ln(8) \quad (2) \quad \ln(x+4)(x+2) = \ln(8) \quad (1)$$

$$\ln(x+4)(x+2) \leq \ln(8) \quad (4) \quad \ln(x+4) + \ln(x+2) \leq \ln(8) \quad (3)$$

الحل

لحل معادلات (مراجحات) يظهر فيها اللوغاريتم نبحث أولاً عن المجموعة E مجموعة تعريف

المعادلة (المراجحة) ثم نكتب المعادلة المعطاة على الشكل $\ln(V(x)) = \ln(U(x))$

(المراجحة المعطاة على الشكل $\ln(V(x)) \leq \ln(U(x))$)

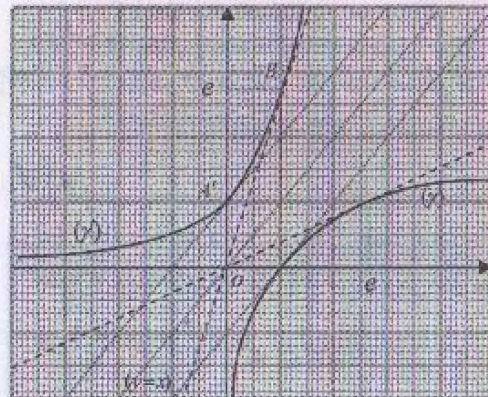
الطريقة الثانية

لإثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ يجب أن نبين من أجل كل عدد حقيقي موجب تاما A يوجد على الأقل عدد حقيقي β بحيث إذا كان $x > \beta$ يكون $\ln x > A$.
بما أن الدالة \exp متزايدة تاما على \mathbb{R} فإن $\ln x > A$ يكافئ $x > e^A$
إذن من أجل كل عدد حقيقي تاما A يوجد عدد حقيقي $\beta = e^A$

x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$ إشارة		+	
تغيرات \ln			$+\infty$

بحيث إذا كان $x > \beta$ يكون $\ln x > A$.
(2) من أجل كل $x > 0$ نضع $X = \frac{1}{x}$
ومن هنا نجد $\ln x = -\ln X$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \lim_{X \rightarrow 0^+} -\ln X = -\infty$

2-3 التمثيل البياني للدالة \ln



ملاحظة
المنحنيان المثلان للدالتين \exp و \ln
متناظران بالنسبة إلى السقيم ذي المعادلة $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس.
- $(\ln)'$ له مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $(-\infty)$ إذن (\ln) له مستقيم مقارب معادلته $x=0$ بجوار 0
- السقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مماس لـ (\ln) عند النقطة $A'(0,1)$ وبالتالي فالسقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مماس لـ (\ln) عند النقطة $A(1,0)$.

تمرين تدريبي 1

حل المعادلة والتراجحة القائبتين

(1) $(\ln x)^2 - 3(\ln x) + 2 = 0$ (2) $(\ln x - 2)(\ln x - 4) \leq 0$

الحل ✓

(1) المجموعة المرجعية للمعادلة (1) هي $E =]0, +\infty[$
بوضع $X = \ln x$ فإن المعادلة (1) تصبح $X^2 - 3X + 2 = 0$
و حلول هذه الأخيرة هي 1 و 2

(1) لا يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2) > 0$
أي $x \in]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$ ومنه $E =]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$.
 $\ln(x+4)(x+2) = \ln(8)$ يكافئ $(x+4)(x+2) = 8$ يكافئ $x^2 + 6x = 0$
و حلا المعادلة $x^2 + 6x = 0$ هما $(x=0)$ و $(x=-6)$
بما أن 0 و -6 ينتميان إلى E فإن مجموعة الحلول للمعادلة المقترحة هي $S = \{0, -6\}$.
(2) لا يمكن أن يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $x > 0$ و $x+4 > 0$ أي $x > -4$
 $\ln(x+4)(x+2) = \ln(8) \dots$ على الشكل * $E =]-2, +\infty[$ و نكتب في E $\ln(x+4)(x+2) = \ln(8)$
حل المعادلة (*) يؤول إلى حل المعادلة $(x+4)(x+2) = 8$
 $(x+4)(x+2) = 8$ يكافئ $x=0$ أو $x=-6$ و -6 لا ينتمي إلى E
وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي $S = \{0\}$

(3) المجموعة المرجعية E هي $E =]-2, +\infty[$
التراجحة المقترحة تكتب في E على الشكل * $\ln(x+4)(x+2) \leq \ln(8)$
حل التراجحة (*) يؤول إلى حل التراجحة $(x+4)(x+2) \leq 8$
 $(x+4)(x+2) \leq 8$ يكافئ $x \in]-6, 0[$
ومن هنا مجموعة حلول التراجحة المقترحة هي $S = E \cap]-6, 0[=]-2, 0[$

(4) لا يكون حلا للتراجحة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2) > 0$ أي $x \in]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$ ومنه $E =]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$
التراجحة المقترحة تكتب في E على شكل $(x+4)(x+2) \leq 8$ أي $x^2 + 6x \leq 0$
 $x^2 + 6x \leq 0$ يكافئ $x \in]-6, 0[$
ومن هنا مجموعة حلول التراجحة المقترحة هي $S = E \cap]-6, 0[=]-6, -4[\cup]-2, 0[$

3 دراسة الدالة \ln

1-3 حساب النهايات عند $(+\infty)$ و 0

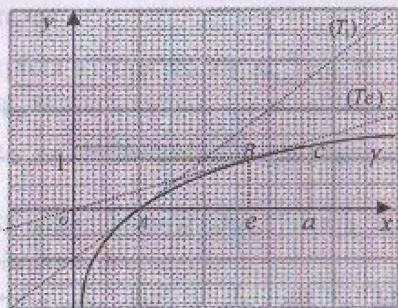
ملاحظة

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

الإثبات

الطريقة الأولى

بوضع $\ln x = y$ نجد $x = e^y$
بما أن x يؤول إلى $(+\infty)$ فإن e^y يؤول إلى $(+\infty)$ ولكي يؤول e^y إلى $(+\infty)$ يجب أن يؤول y إلى $(+\infty)$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$



و عليه من أجل كل $x > 0$ يكون

$$\ln x \leq \ln a + \frac{x-a}{a}$$

(د) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مماس لـ (γ) عند النقطة $A(1, 0)$ وبالتالي المنحنى (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) أي من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $\ln x \leq x - 1$

تمرين تدريبي 3

بين أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $\ln x < \sqrt{x}$

✓ الحل

المطريقة المناسبة للبرهان على أن $\ln x < \sqrt{x}$ من أجل كل $x > 0$ هي دراسة تغيرات الدالة

f المعرفة على $I =]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على I ولدينا $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

$f'(x) = 0$ يكفي $x = 4$

$2 - \sqrt{x} \geq 0$ يكفي $x \leq 4$

$2 - \sqrt{x} \leq 0$ يكفي $x \geq 4$

بما أن $2.718 < e < 2.719$ فإن

$4 < e^2$ وبالتالي $\ln 4 < \ln e^2$

أي $\ln(4) - 2 < 0$

لأن من أجل كل x من $]0, +\infty[$

يكون $f(x) < 0$ وبالتالي $\ln x - \sqrt{x} < 0$ أي $\ln x < \sqrt{x}$

4 نهايات شهيرة

مرهنة

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad (3)$$

$$\ln x = 1 \text{ يكفي } x = e^1 = e$$

$$\ln x = 2 \text{ يكفي } x = e^2$$

وبما أن e و e^2 ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S = \{e, e^2\}$

(2) المجموعة المرجعية للمترابحة (2) هي $E =]0, +\infty[$

بوضع $X = \ln x$ المترابحة (2) نكتب على الشكل $(X-2)(X-4) \leq 0$

ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $[2, 4]$ أي $2 \leq X \leq 4$ لكن $\ln e^2 = 2$ و $\ln e^4 = 4$

بالتالي $\ln e^2 \leq \ln x \leq \ln e^4$

ومنه ينتج $e^2 \leq x \leq e^4$ (لأن الدالة \ln متزايدة تماماً)

إذن مجموعة حلول المترابحة (2) هي $S = [e^2, e^4]$

تمرين تدريبي 2

(γ) المنحنى البياني للدالة \ln في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

C نقطة منه فاصلتها a مع $a > 0$

(1) اكتب بدلالة a معادلة المماس (Ta) للمنحنى (γ) عند النقطة C

(2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ أن المماس (Ta) يقع فوق (γ)

(3) استنتج أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $\ln x \leq x - 1$

✓ الحل

(1) $f(x) = \ln x$ حيث (Ta) : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ومن أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{1}{x}$

إذن $f'(a) = \frac{1}{a}$ وبالتالي $y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln a$ و (Ta) :

(2) دراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (Ta)

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (γ) بالنسبة إلى المماس (Ta) ندرس إشارة المقدار

$$d(x) = \ln x - \left(\frac{x}{a} - 1 + \ln a \right)$$

الدالة d قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ومن أجل كل $x > 0$

x	0	a	+	+	+
d'(x)			+	0	-
تغيرات d			↗	↘	↘

$$d'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a-x}{ax}$$

نلاحظ من الجدول أن من أجل كل

$x \neq a$ لدينا $d(x) < 0$

إذن المنحنى (γ) يقع تحت المماس (Ta)

(1) الدالة \ln قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

فهي قابلة للاشتقاق عند 1 و عددنا المشتق هو $\ln'(1) = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1 \quad \text{أي} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

(2) بوضع $X = \ln(x)$ يكون $x = e^X$ و لما $x \rightarrow +\infty$ فإن $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0^+$$

(3) بوضع $X = \frac{1}{x}$ يكون $x \ln x = -\frac{\ln X}{X}$

ولما x يؤول إلى الصفر بقيم أكبر فإن X يؤول إلى $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0^-$$

ملاحظة

بوضع $x = X-1$ العبارة $\frac{\ln(1+x)}{x}$ تكتب $\frac{\ln X}{X-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$$

التفسير الهندسي والتحليلي للنهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

- إذا كانت M نقطة كيفية من التمثيل البياني للدالة \ln فإن إحداثياتها $(x, \ln x)$.
- المستقيم (OM) معامل توجيهه $\frac{\ln x}{x}$ و عليه لما x يأخذ قيمة كبيرة جدا، فإن للمستقيم (OM) يقترب أكثر فأكثر من محور الفواصل، حينئذ نستطيع القول أن النحني البياني (γ) للدالة \ln لا يقبل مستقيما مقاربا مائلا.
- المسافة العمودية بين (γ) و محور الفواصل تتزايد بشكل شديدا كلما أخذ x قيمة كبيرة جدا و هذا يجعلنا نرى أن النحني (γ) على شكل قطع مستقيمة موازية لـ (x') . على مجال من الشكل $[a, b]$ حيث a و b كبيرتان جدا .
- النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ تسمح لنا بمقارنة x و $\ln x$ من أجل قيم كبرى لـ x .
- نقول أن x تتفوق على $\ln x$ بجوار $(+\infty)$.

تمرين تدريبي

احسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \quad (5) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+1) - \ln(x-1) \quad (4)$$

✓ الحل

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

فإنه حسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} = -\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{و عليه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty - \infty$$

من أجل كل $x > 0$ يكون $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) = +\infty$$

و منه نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$ نبحث عن كتابة أخرى لـ $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x-1)$ بحيث تظهر النهايات الشهيرة.

ومن أجل كل $x > 1$ يكون $f(x) = \ln \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)$

$$\text{لكن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 0^-$$

و منه نحصل على عدم التعيين من الشكل $0 \times \infty$ بوضع $-\frac{1}{x} = X$ فإن العبارة

$$x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \quad \text{تصبح} \quad -\frac{\ln(1+X)}{X}$$

$$\text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{\ln(1+X)}{X} = -1$$

تمرين تدريبي - 2

- باعتباره من أجل كل $x > 0$ و $a > 0$ لدينا $\ln x \leq \ln a + \frac{x-a}{a}$ *
- (1) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ يكون $\ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$ ،
- (2) ما هو شكل المنحنى (γ) في المجال $[100, 101]$ ؟

✓ الحل

- (1) بوضع $x = a+1$ في المتباينة (*) نجد $\ln(a+1) \leq \ln a + \frac{a+1-a}{a}$ أي $\ln(a+1) - \ln a \leq \frac{1}{a}$ (**)
- (2) بوضع $a = 100$ في العلاقة (**) نجد $\ln 101 - \ln 100 \leq \frac{1}{100}$ ومنه نستنتج أن النقطتين $A(100, \ln 100)$ و $B(101, \ln 101)$ لهما نفس الترتيب تقريبا وهذا مما يفسر أن (γ) في المجال $[100, 101]$ على شكل قطعة مستقيمة موازية لـ (xx') .

5. اللوغاريتم العشري

5-1 تعريف

نسمي الدالة اللوغاريتمية العشرية الدالة التي نرمز لها بـ Log المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $\text{Log} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ مع $\text{Log} 10 = 1$ و $\text{Log} 1 = 0$.

5-2 خواص

- (1) الدالة Log معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.
- (2) الدالة Log متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ لأن $\ln 10 > 0$.
- (3) الدالة Log لها نفس الخواص الجبرية للدالة \ln وبصفة خاصة أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b و من أجل كل عدد طبيعي p ،
- $\text{Log} a^p = p \text{Log} a$ و $\text{Log} ab = \text{Log} a + \text{Log} b$ و $\text{Log} 10^p = p$.
- (4) من أجل كل عدد حقيقي A موجب تماما لدينا $10^n \geq A \Leftrightarrow n \geq \text{Log} A$ ،
- $x = 0$ مستقيم مقارب لـ (γ) .

تمرين تدريبي

- باعتبار أن عددا A يحقق $10^n \leq A < 10^{n+1}$ حيث n عدد طبيعي.
- (1) ما هو عدد أرقام جزئه الصحيح ؟
- ثم استنتج حصرا للعدد $\text{Log} A$ معينا الجزء الصحيح لـ $\text{Log} A$.
- (2) إذا علمت أن $\text{Log} A = 5.52$ ما هو عدد أرقام جزئه الصحيح لـ A و \sqrt{A} و A^{100} ؟

✓ الحل

- (1) عند يتألف من رقمين يكون محصورا بين 10 و 100 ، وآخر يتألف من ثلاثة أرقام يكون محصورا بين 100 و 1000 . وبشكل عام فإن العدد المحصور بين 10^n و 10^{n+1} عدد أرقامه $(n+1)$.
- $A \geq 10^n \Leftrightarrow \text{Log} A \geq n$ وبالتالي الجزء الصحيح لـ $\text{Log} A$ هو n .
- (2) - نعلم أن $\text{Log} A \geq 5$ و منه ينتج $A \geq 10^5$ وبالتالي عدد أرقام الجزء الصحيح للعدد A هو 6.
- لدينا $\text{Log} \sqrt{A} = \frac{1}{2} \text{Log} A = 2.760$ و منه ينتج $10^2 \leq \sqrt{A} < 10^3$ وبالتالي عدد أرقام الجزء الصحيح لـ \sqrt{A} هو 3.
- لدينا $\text{Log} A^{100} = 100 \text{Log} A = 552$ و عليه يكون $10^{552} \leq A^{100} < 10^{553}$ و منه ينتج $A^{100} \geq 10^{552}$ وبالتالي عدد أرقام الجزء الصحيح لـ A^{100} هو 553.

6. الدالة المركبة مع الدالة \ln

لتكن U دالة قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على مجال I ولنعتبر الدالة g المعرفة بـ $g = \ln \circ U$

مبرهنة

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على I و من أجل كل x من I لدينا $g'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$ وإشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $U'(x)$.

الإنذارات

من أجل كل x من I لدينا $g'(x) = (\ln u(x))' = U'(x) \times L'n(U(x))$

وبما أنه من أجل كل $x > 0$ لدينا $L'n(x) = \frac{1}{x}$ فإن $L'n(U(x)) = \frac{1}{U(x)}$

إذن $g'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

بما أن $U(x) > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $U'(x)$.

نتيجة

الدالة المشتقة للدالة $x \rightarrow \ln |U(x)|$ هي الدالة $x \rightarrow \frac{U'(x)}{U(x)}$

خواص

- الدالتان U و $\ln U$ لهما نفس اتجاه التغير على I .
- في كل ما يلي نعتبر (*) إما عدد a أو $+\infty$ أو $-\infty$.
- إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \ln(U(x)) = +\infty$.
- إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \ln(U(x)) = -\infty$.
- إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = b$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \ln(U(x)) = \ln(b)$ بحيث $b > 0$.

تمرين تدريبي 1

درس تغيرات الدالة g المعرفة بالعبارة $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

الحل

- الدالة g معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{x}{x+1} > 0$
أي $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ ومنه $D_g =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$
- الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على D_g لأنها مركبة من دالتين قابلتين للاشتقاق على D_g هما:

$$x \xrightarrow{f} \ln(x) \text{ و } x \xrightarrow{U} \frac{x}{x+1}$$

ومن أجل كل x من D_g لدينا $g'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

ومن أجل كل x من D_g يكون $g'(x) > 0$

ومنه g متزايدة تماماً على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $]-\infty, -1[$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	+			+
تغيرات g		$+\infty$	0	$-\infty$

- بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \ln(1) = 0$$

- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln(1) = 0$$

- بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0^+$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$
و $x = -1$ و $x = 0$ و $y = 0$ مستقيمات مقاربة لـ (C_g)

تمرين تدريبي 2

(1) بدراسة تغيرات الدالة $x \rightarrow \ln x + 1 - x$ على المجال $]0, +\infty[$ بين أنه

من أجل كل $x > 0$ يكون $\ln x \leq x - 1$... (i)

(2) باستعمال للنهائية (1)

(a) بين أنه من أجل كل $x > 1$ يكون $\ln(1+x) \leq x$

(ب) بوضع $x = \frac{1}{1+t}$ بين أنه من أجل كل $t > 0$ يكون $\ln(1+t) \leq \frac{t}{1+t}$

ثم استنتج حصراً للعدد $\ln(1+x)$ من أجل كل $x > -1$

(3) بوضع $x = \frac{1}{p}$ مع p عدد طبيعي غير معدوم.

(a) بين أن $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$

(ب) (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

- بين أن $U_n \leq \ln(2) \leq U_n + \frac{1}{2n}$ ثم استنتج أن (U_n) متقاربة نحو $\ln(2)$.

- أعط حصراً $\ln(2)$ من أجل $n=5$.

الحل

(1) الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 1$

- إذا كان $x > 1$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماماً على $]1, +\infty[$.

- إذا كان $x < 1$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $]0, 1[$.

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	-
تغيرات f		0	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1-x}{x} \right) = -\infty$$

نلاحظ من جدول تغيرات f أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً. لدينا

$$\ln(x) \leq x - 1 \text{ أي } f(x) \leq 0$$

$$(2) \text{ (i) لدينا } \ln(x) \leq -1 + x \text{ ...}$$

بوضع $x = 1+t$ في العبارة (1) نجد $\ln(1+t) \leq -1 + (1+t)$

$$\text{أي } \ln(1+t) \leq t \text{ ... (*)}$$

(ب) بوضع $x = \frac{1}{1+t}$ في العبارة (1) نجد $\ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \leq -1 + \frac{1}{1+t}$

$$\text{بالتبسيط } \ln(1+t) \geq \frac{-t}{1+t} \text{ ... (**)}$$

$$\text{من (*) و (***) نجد } \frac{-t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t \text{ ... (I)}$$

لأن من أجل كل عدد حقيقي $x - 1$ لدينا $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

$$(3) \text{ (i) بوضع } x = \frac{1}{p} \text{ في العبارة (I) نجد } \frac{1}{1+\frac{1}{p}} \leq \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

$$\text{بالتبسيط نجد } \frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

$$\text{(ب) من أجل } p=n \text{ لدينا } \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{من أجل } p=n+1 \text{ لدينا } \frac{1}{n+2} \leq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{من أجل } p=n+2 \text{ لدينا } \frac{1}{n+3} \leq \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\vdots$$

$$\text{من أجل } p=2n-1 \text{ لدينا } \frac{1}{2n} \leq \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{2n-1}$$

بجمع أطراف المتباينات طرفاً إلى طرف وحسب خواص الدالة \ln نجد :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \dots \times \frac{2n}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{بالتبسيط نجد } U_n \leq \ln(2) \leq U_n + \frac{1}{2n} \text{ أي } U_n \leq \ln\left(\frac{2n}{n}\right) \leq U_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

ومنه نستنتج أن (U_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N}

بما أن $U_n \leq \ln(2)$ فإنه (U_n) محدودة من الأعلى وعليه فالمتتالية متقاربة نحو l

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ فإنه حسب نظرية الحصر نجد :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(U_n + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln 2$$

$$\text{اذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln(2)$$

- من أجل $n=5$ لدينا $U_5 \leq \ln(2) \leq U_5 + \frac{1}{10}$

$$0,643 \leq \ln(2) \leq 0,743 \text{ وبالتالي } U_5 = 0,643 \text{ ومنه } U_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

7. دراسة الدالة $x \mapsto a^x$ مع $a > 0$ و $a \neq 1$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $a^x = e^{x \ln a}$

لأن $f_a(x) = e^{x \ln a}$ و نكتب أيضاً $f_a(x) = e^{u(x)}$ حيث $u(x) = x \ln a$

لأن f_a هي الدالة للركبة \exp التي تسمى الدالة الأسية ذات الأساس a و نرمز لها بـ \exp_a

7-1 اتجاه تغير f_a

مبرهنة

من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ و $a \neq 1$ الدالة f_a العرقة على \mathbb{R} بـ $f_a(x) = a^x$ قابلة

للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'_a(x) = (\ln a) a^x$

الإثبات

بما أن الدالة $x \mapsto x \ln a$ معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} فإن الدالة $f_a = \exp \circ U$

معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا

$$f'_a(x) = (\exp \circ U)'(x) = u'(x) \exp(u(x)) = \ln(a) \times e^{u(x)} = \ln(a) \times a^x$$

نتيجة

إشارة $f'_a(x)$ من إشارة $\ln(a)$ لأن $a^x > 0$

- إذا كان $a > 1$ فإن $f'_a(x) > 0$ ومنه f_a متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

- إذا كان $0 < a < 1$ فإن $f'_a(x) < 0$ ومنه f_a متناقصة تماماً على \mathbb{R} .

مثال -

$$\left((\sqrt{2})^x \right)' = \ln(\sqrt{2}) \times (\sqrt{2})^x, \quad (2^x)' = \ln(2) \times 2^x$$

7-2 نهاية f_a عند $(+\infty)$ وعند $(-\infty)$

بما أن $a^x = e^{x \ln(a)}$ وبما أن $\ln(a)$ يغير إشارته في جوار a فإننا نميز حالتين بالنسبة إلى a - الحالة الأولى $a > 0$

بما أن $a > 0$ فإن $\ln(a) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = 0$$

- الحالة الثانية $a > 1$

بما أن $a > 1$ فإن $\ln(a) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$$

إليك جدول تغيرات f_a

الحالة	x	$-\infty$	$+\infty$
الحالة $a > 1$	إشارة	-	+
	$f_a'(x)$	-	+
	تغيرات f_a	$+\infty$	0

ملاحظة

(1) الدالة f_a هي الدالة العكسية للدالة \log_a حيث $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} = x \quad y = a^x$$

(2) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_{\frac{1}{a}}(x) = e^{x \ln(\frac{1}{a})} = e^{-x \ln(a)} = f_a(-x)$

منه نستنتج أن المنحنيين الممثلين لـ f_a و $f_{\frac{1}{a}}$ متناظران بالنسبة إلى محور الترتيب.

تمارين تدريبية

(1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها (f) حيث $f(x) = (2-x) \times 3^x$

(2) ادرس تغيرات g ثم ارسم منحناها (g) حيث $g(x) = x - 2^x \times \frac{1}{\ln(2)}$

الحل

(1) الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما:

$$x \mapsto 2-x \quad \text{و} \quad x \mapsto 3^x$$

$$\text{ولدينا } f'(x) = 3^x (-x \ln 3 + 2 \ln 3 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{تكافئ} \quad x = \frac{2 \ln 3 - 1}{\ln 3} = \alpha$$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(-x \ln 3 + 2 \ln 3 - 1)$ و عليه

- إذا كان $x < \alpha$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty, \alpha[$

- إذا كان $x > \alpha$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]\alpha, +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ عدم التعيين.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) e^{x \ln 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 e^{x \ln 3} - x e^{x \ln 3}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 e^{x \ln 3} - \frac{1}{\ln 3} x \ln 3 \times e^{x \ln 3} \right] = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln 3 \times e^{x \ln 3} = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 e^{x \ln 3} = 0$$

$$f(\alpha) = 3,0135 \quad \alpha \approx 1,1$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-
تغيرات f	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

(2) الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = 1 - 2^x = 1 - e^{x \ln 2}$

$g'(x) = 0$ يكافئ $2^x = 1$ يكافئ $x = 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $1 - 2^x > 0$ أي

$g'(x) > 0$ ومنه g متناقصة تماما

على $]-\infty, 0[$

إذا كان $x > 0$ فإن $1 - 2^x < 0$ أي

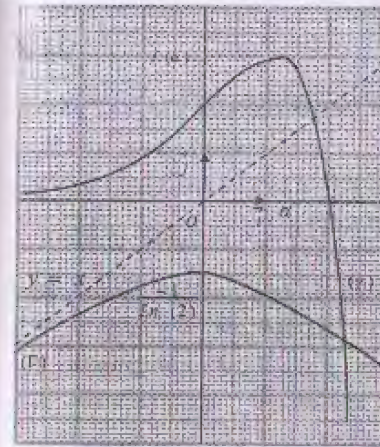
$g'(x) < 0$ ومنه g متزايدة تماما

على $]0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ حالة عدم التعيين.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	+	0	-
تغيرات g	$-\infty$	$\frac{-1}{\ln(2)}$	$-\infty$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{\ln(2)} e^{x \ln(2)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{e^{x \ln(2)}}{x \ln(2)} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln(2)}}{x \ln(2)} = +\infty$$

لأن التلحني (y) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ في جوار $(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2^x \times \frac{1}{\ln(2)} = 0$$

ومنه (Γ) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ في جوار $(-\infty)$

8. الأسس الحقيقية

من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ و من أجل كل عدد حقيقي b نرمز إلى a^b بالرمز $e^{b \ln(a)}$ ونكتب عندئذ $a^b = e^{b \ln(a)}$

نتيجة

من أجل كل عدد حقيقي b و من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ لدينا $\ln(a^b) = b \ln(a)$

ملاحظة

إذا كان b عدد صحيح فإن الكتابة a^b لها معنى من أجل كل عدد حقيقي a غير معلوم.
إذا كانت b عدد حقيقي غير صحيح فإن a^b لا يكون معرفا إلا من أجل $a > 0$.

مثال

$$2^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln(2)} \quad (1) \quad 3^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2} \ln(3)}$$

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln(-2)} \quad (2) \quad \text{لأن } \ln(-2) \text{ غير موجود}$$

مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين $a > 0$ و $a' > 0$ و من أجل كل عددين حقيقيين b و b' لدينا:

$$(1) \quad 1^b = 1 \quad (2) \quad (a a')^b = a^b \times a'^b \quad \text{و} \quad a^b \times a'^b = a^{b+b'} = a^{b+b'}$$

$$\frac{a^b}{a^{b'}} = \left(\frac{a}{a'} \right)^b \quad \text{و} \quad \frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'} \quad \text{و} \quad (a^b)^{b'} = a^{bb'} \quad (1)$$

إثبات

(1) $\ln(1^b) = b \ln(1) = 0$ ومنه $1^b = 1$ لأن الدالة \ln متزايدة تماما.

$$(2) \quad (a^b)^{b'} = a^{bb'} \quad \text{و} \quad \ln(a^b)^{b'} = b' \ln(a^b) = b' b \ln(a) = \ln(a^{bb'})$$

$$\ln\left(\frac{a^b}{a^{b'}}\right) = \ln(a^b) - \ln(a^{b'}) = b \ln(a) - b' \ln(a) = (b-b') \ln(a) = \ln(a^{b-b'})$$

ومنه $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$ بنفس الكيفية نبين النتائج الأخرى.

ملاحظة

- المساواة $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ محققة من أجل كل a عدد حقيقي و b عدد صحيح و تبقى صحيحة من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل عدد حقيقي b .
- المساواة $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ غير محققة من أجل أعداد حقيقية $a < 0$ وهذا عندما يكون b و b' عددين حقيقيين غير صحيحين.

9. الدوال: $x \mapsto x^n$ مع n عدد صحيح غير معدوم

من أجل كل عدد صحيح n غير معدوم، f_n هي الدالة $x \mapsto x^n$ و (f_n) متناظرة البياني في معلم متعامد و متجانس.

لا يكون n عددا صحيحا سالبا غير معدوم و x عددا حقيقيا غير معدوم $f_n(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}}$

لأن ندرس الدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ مع n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1.

أ) دراسة الدالة $x \mapsto x^n$ و $n \geq 1$

معرفة على \mathbb{R} .

إذا كان n زوجيا فإنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_n(-x) = f_n(x)$ أي f_n زوجية.

إذا كان n فرديا فإنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_n(-x) = -f_n(x)$ أي f_n فردية.

دراسة تغيرات f_n

بما أن f_n زوجية أو فردية (حسب n) فإننا نقتصر دراستها على $[0, +\infty[$.

إذا كان $n = 1$ فإن $f_1(x) = x$

و هي دالة تألفيه بيانها مستقيم معادلته $y = x$.

إذا كان $n \geq 2$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ $f_n'(x) = n x^{n-1}$

ملاحظة

من أجل كل عدد حقيقي x ومن أجل كل $x > 0$ لدينا $x = e^{\ln(x)}$ و $\ln(x) = e^{\ln(x)}$ و دراسة الدالة $x \mapsto x^n$ على $[0, +\infty[$ يؤول إلى دراسة $x \mapsto x^n$ و تسمى الدالة $x \mapsto x^n$ دالة الأس.

تمرين تدريبي

x عند حقيقي يختلف عن 1. احسب المجموع التالي $S = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

الحل

الأعداد 1, x , x^2 , ..., x^n هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها x وحدها الأول 1 و عدد حدود S هي $n+1$ إذن $S = 1 \times \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

10. دالة الجذر النوني

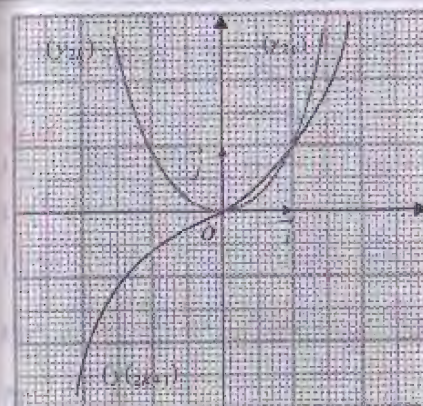
في هذه الفقرة n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2. لكن f_n الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ $f_n(x) = x^n$ f_n تقابل من $[0, +\infty[$ في $[0, +\infty[$ إذن من أجل كل $y \in [0, +\infty[$ يوجد عدد حقيقي واحد x بحيث $x^n = y$.

إذا كان $y > 0$ فإن $\left(\frac{1}{y}\right)^n = y$ وبالتالي $x = \frac{1}{y^n}$ وإذا كان $y = 0$ فإن $x = 0$.

نسمي العدد الحقيقي الموجب x بالجذر النوني لـ y و نرمز له بـ $\sqrt[n]{y}$ و نكتب $\sqrt[n]{y} = x$ و نكتب $y = x^n$ إذن من أجل كل $x \geq 0$ و $y \geq 0$ لدينا $x = \sqrt[n]{y}$ يكافئ $y = x^n$.



الدالة $\sqrt[n]{\cdot}$ التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب y العدد الحقيقي الموجب x هي الدالة العكسية للدالة f_n . الدالة $\sqrt[n]{\cdot}$ تسمى دالة الجذر النوني.



من أجل كل $x > 0$ لدينا $f'_n(x) > 0$ بالتالي f_n متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
إشارة $f'_n(x)$	0	+
تغيرات f_n	0	$+\infty$

صورة $[0, +\infty[$ بالدالة f_n هي $[0, +\infty[$ وبالتالي f_n تقابل من $[0, +\infty[$ في $[0, +\infty[$.

و التمثيل البياني للدالة f_n هو المنحني (γ_n) يقبل مماساً افقياً في النقطة $o(0,0)$.

(ب) دراسة الدالة $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ و $n \geq 1$ f_n معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$.

إذا كان n زوجياً فإن f_n زوجية وإذا كان n فردياً فإن f_n فردية. دراسة تغيرات f_n

تقتصر الدراسة على $[0, +\infty[$ (لأن f_n زوجية أو فردية حسب n).

من أجل $x > 0$ يكون $f'_n(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

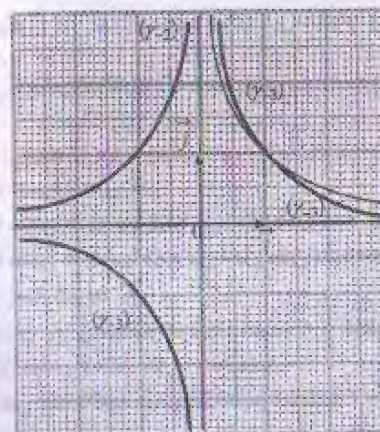
من أجل كل $x > 0$ يكون $f'_n(x) < 0$ و منه f_n متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$

وإليك جدول تغيرات الدالة f_n

x	0	$+\infty$
إشارة $f'_n(x)$	0	-
تغيرات f_n	$+\infty$	0

يما أن صورة $[0, +\infty[$ بالدالة f_n هي $[0, +\infty[$ فإن الدالة f_n تقابل من $[0, +\infty[$ في $[0, +\infty[$.

المنحني (γ_n) يقبل الستقيم $y = 0$ مقارباً افقياً و يقبل الستقيم $x = 0$ مقارباً عمودياً.



1-10 تعريف

دالة الجذر النوني هي الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و تعرف على المجال $[0, +\infty[$

ملاحظة

بما أن $(\sqrt[n]{x})^n = x$ و $x > 0$ فإن $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0} = 0$
 إذن نستطيع أن نعرف الدالة $\sqrt[n]{x}$ كما يلي $x > 0$ يكون $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0} = 0$

2-10 خواص الدالة $\sqrt[n]{x}$

مبرهنة

دالة الجذر النوني قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$

الإثبات :

من أجل كل $x > 0$ لدينا $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(x)}$
 $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times e^{\frac{1}{n} \ln(x)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$

ملاحظة

الدالة $\sqrt[n]{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و منحناها البياني له مماس عمودي عند النقطة ذات الماصلة صفر.

نتيجة

دالة الجذر النوني مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$

3-10 التمثيل البياني للدالة $\sqrt[n]{x}$

دالة الجذر النوني هي الدالة

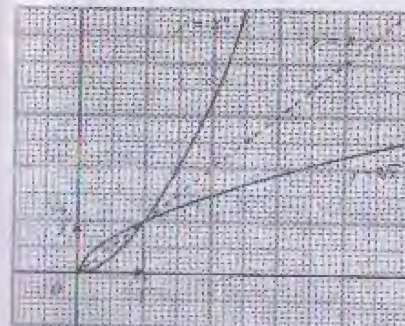
العكسية للدالة $x \mapsto x^n$

تعرف على المجال $[0, +\infty[$

و منحناها البياني متناظران

بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة :

$y = x$



1-10 تمرين تدريبي

(1) a عدد حقيقي موجب يختلف عن 1 برهن أن $(a^p)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^p = a^{\frac{p}{n}}$

حيث n, p عدنان طبيعيان غير معدومين.

(2) بسط العدد B حيث $B = \sqrt[3]{54} \times \sqrt[5]{64} \sqrt{6}$

✓ الحل

$$(a^p)^{\frac{1}{n}} = (e^{p \ln(a)})^{\frac{1}{n}} = (e^{\ln(a)^p})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{p}{n} \ln(a)} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(e^{\frac{1}{n} \ln(a)}\right)^p = \left(e^{\ln(a)^{\frac{p}{n}}}\right) = e^{\ln(a)^{\frac{p}{n}}} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$B = 54^{\frac{1}{3}} \times 64^{\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{1}{2}} = (3^3 \times 2)^{\frac{1}{3}} \times (2^6)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (3^3)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{31}{10}}$$

2-10 تمرين تدريبي

(1) حل المعادلة $x^{\frac{4}{3}} = 2$ (ب) حل المتراجحة $(x-1)^{-\frac{3}{2}} \geq 2$

✓ الحل

$$(1) \quad x^{\frac{4}{3}} = 2 \quad \text{برفع الطرفين إلى القوة } \frac{3}{4} \quad \text{نجد } \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \quad \text{أي } x = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$(2) \quad (x-1)^{-\frac{3}{2}} \geq 2 \quad \text{يكافئ } \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \geq 2 \quad \text{بالقلب نجد } \frac{1}{2} \leq (x-1)^{\frac{3}{2}} \quad \text{و بما أن دالة الأس}$$

متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ فإنه نستنتج $\left((x-1)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ أي

$$x-1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 \quad \text{منه } x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 1$$

حتى تكون المتراجحة لها معنى يجب أن يكون $x-1 > 0$ أي $x > 1$

$$\text{إذن مجموعة الحلول هي } S = \left] 1, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right[$$

نتيجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) e^x = 0 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x^n = 0 \quad (3)$$

مع $p(x)$ كثير حدود

الإثبات

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X^n} = 0 \quad \text{نجد } X = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^n}}} = 0 \quad (2)$$

تمرين تدريبي 1

1) ادرس نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{x^3}{\ln x} \quad (أ) \quad f(x) = \frac{e^x}{(\ln x)^2} \quad (ب) \quad f(x) = \frac{e^x}{\ln x} \quad (ج)$$

$$(2) \text{ بين أنه من أجل كل } x > 0 \text{ يكون } \frac{1}{(\ln x)^2} = \left(\frac{1}{\ln x} \right)^2$$

$$\text{ثم استنتج نهاية } \frac{1}{(\ln x)^2} \text{ عند } (+\infty)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{e^x}{x} \right)}{\left(\frac{\ln x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) \times \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x} \right)} = +\infty \quad (أ)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x} \right)^2} = +\infty \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x x^{\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{x} e^x = +\infty \quad (ج)$$

$$\frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x^6} \right)^2}{(\ln x)^2} = \left(\frac{1}{\ln x} \right)^2 \quad (2)$$

11) مقارنة بعض الدوال بجوار $(+\infty)$

الدوال $x \mapsto x^n$ ، $x \mapsto \ln x$ ، $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 1$ ، و عليه من أجل قيم كبرى لـ x الأعداد e^x ، $\ln(x)$ ، x^n تكرر أكثر فأكثر و الهدف هو مقارنة ترتيب المقادير e^x ، x^n ، $\ln(x)$ من أجل قيم كبرى لـ x .

من أجل ذلك ندرس النهايات عند $(+\infty)$ للدوال $x \mapsto \frac{e^x}{x^n}$ ، $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^n}$

مبرهنة :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

الإثبات :

(1) بوضع $X = x^n$ يكون $x = X^{\frac{1}{n}}$ و $x \rightarrow +\infty$ فإن $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(X^{\frac{1}{n}} \right)}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{\ln X}{X} = 0$$

(2) لدينا $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n \ln(x)}} = e^{x - n \ln(x)}$ و عليه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - n \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \left(1 - \frac{n \ln(x)}{x} \right)} = +\infty$$

تفسير المبرهنة :

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ فإن العدد $\frac{e^x}{x^n}$ يصبح كبيرا جدا بجوار $(+\infty)$

و بصيغة أخرى من أجل قيم كبرى لـ x العدد x^n يصبح صغيرا جدا أمام e^x من أجل كل عدد طبيعي n .

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ فإن العدد $\frac{\ln(x)}{x^n}$ يصبح صغيرا جدا من أجل قيم كبرى لـ x .

و من أجل قيم كبرى لـ x فإن العدد x^n يصبح كبيرا جدا أمام $\ln(x)$.

نقول عندئذ من أجل قيم كبيرة بالقدر الكافي لـ x أن $e^x > x^n > \ln(x)$.

ملاحظة

المبرهنة تبقى صحيحة في حالة n عدد حقيقي موجب.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}{6 \ln \left(\frac{1}{x^6} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{36} \left(\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}}}{\ln \left(\frac{1}{x^6} \right)} \right) = +\infty$$

تمرين تدريبي 2

- (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ يكون $\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}} > \frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}$
 (2) استنتج نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ حيث $f(x) = \frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}}$

✓ الحل

(1) من أجل كل $x > 0$ يكون $x(5x+3) > x$ وبما أن الدالة \exp متزايدة تماماً فإنه ينتج

$$e^{5x+3} > e^x \text{ وبالقسمة على } x^{\frac{5}{2}} \text{ نجد } \frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}} > \frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{(x^5)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2x}}{x^5} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(32 \frac{e^{2x}}{(2x)^5} \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(32 \frac{e^x}{x^5} \right)^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ حيث } X = 2x$$

$$\text{بما أن } f(x) \geq \frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}} = +\infty \text{ فإن حسب نظرية الحصر } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

تطبيقات نموذجية



1 تطبيق

تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى:

- (أ) $\ln(1-x)$ ، (ب) $\ln(x^3)$ ، (ج) $\frac{1}{x} \ln(1+x)$
 (د) $\ln(2x^2-4)$ ، (هـ) $\ln(2x-4)(3-x)$
 (و) $\ln(2x-4) + \ln(3-x)$ ، (ز) $\ln(x^2+x+1)$

✓ الحل

(أ) حتى يكون للعبارة $\ln(1-x)$ معنى يجب أن يكون $1-x > 0$ أي $x < 1$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-\infty, 1[$

(ب) حتى يكون للعبارة $\ln(x^3)$ معنى يجب أن يكون $x^3 > 0$ أي $x > 0$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]0, +\infty[$

(ج) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x} \ln(1+x)$ معنى يجب أن يكون $1+x > 0$ و $x \neq 0$ أي $x > -1$ و $x \neq 0$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]0, +\infty[\cup]-1, 0[$

(د) حتى يكون للعبارة $\ln(2x^2-4)$ معنى يجب أن يكون $2x^2-4 > 0$ أي $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]2, +\infty[\cup]-\infty, -\sqrt{2}[$

(هـ) حتى يكون للعبارة $\ln(2x-4)(3-x)$ معنى يجب أن يكون $(2x-4)(3-x) > 0$ أي $x \in]2, 3[$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]2, 3[$

(و) حتى يكون للعبارة $\ln(2x-4) + \ln(3-x)$ معنى يجب أن يكون $2x-4 > 0$ و $3-x > 0$ أي $x > 2$ و $x < 3$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]2, 3[$

(ز) حتى يكون للعبارة $\ln(x^2+x+1)$ معنى يجب أن يكون $x^2+x+1 > 0$ مميز x^2+x+1 هو $\Delta = -3$

ومنه من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $x^2+x+1 > 0$ إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D = \mathbb{R}$

تطبيق 2

تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة العطاء لها معنى :

(أ) $\ln(x^2 + 9x)$ (ب) $\ln(|x^2 - 3x + 2|)$

(ج) $\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)$ (د) $\ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$

(هـ) $\ln(\sqrt{x-1} - 2)$ (و) $\ln(x|x-1|)$

(ز) $\frac{\sqrt{x+3}}{\ln(x+1)}$ (ي) $\frac{1}{x \ln x}$

✓ الحل

(أ) حتى يكون للعبارة $\ln(x^2 + 9x)$ معنى يجب أن يكون $x^2 + 9x > 0$

$x^2 + 9x > 0$ يكافئ $x \in]-\infty, -9[\cup]0, +\infty[$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]-\infty, -9[\cup]0, +\infty[$

(ب) حتى يكون للعبارة $\ln(|x^2 - 3x + 2|)$ معنى يجب أن يكون $|x^2 - 3x + 2| > 0$

$|x^2 - 3x + 2| > 0$ يكافئ $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ يكافئ $(x \neq 1) \text{ و } (x \neq 2)$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

(ج) حتى يكون للعبارة $\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)$ معنى يجب أن يكون $|x-1| > 0$ و $|x+1| > 0$

أي $x-1 \neq 0$ و $x+1 \neq 0$

$(x \neq -1) \text{ و } (x \neq 1)$ يكافئ $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

(د) حتى يكون للعبارة $\ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$ معنى يجب أن يكون $\frac{x-2}{3-x} > 0$ و $3-x \neq 0$

$\frac{x-2}{3-x} > 0$ إذا وفقط إذا كان $x \in]2, 3[$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]2, 3[$

(هـ) حتى يكون لـ $\ln(\sqrt{x-1} - 2)$ معنى يجب أن يكون $\sqrt{x-1} - 2 > 0$ و $x-1 \geq 0$

$x-1 \geq 0$ يكافئ $x \geq 1$

$\sqrt{x-1} - 2 > 0$ يكافئ $\sqrt{x-1} > 2$ يكافئ $x-1 > 4$ يكافئ $x > 5$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]5, +\infty[$

(و) حتى تكون للعبارة $\ln(x|x-1|)$ معنى يجب أن يكون $x|x-1| > 0$ (1)

حل المراجعة (I) :

- حالة $x \geq 0$:

للمراجعة (I) تكافئ $x^2 - 1 > 0$ تكافئ $x > 1$

ومنه مجموعة الحلول في هذه الحالة هي $]1, +\infty[$

- حالة $x \leq 0$:

للمراجعة (II) تكافئ $-x^2 - 1 > 0$ تكافئ $x^2 + 1 < 0$

التي لا تملك حلاً. خاتمة ومنه مجموعة حلول المراجعة $x > 1$ هي \emptyset

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]1, +\infty[$

(أ) حتى يكون للعبارة $\frac{\sqrt{x+3}}{\ln(x+1)}$ معنى يجب أن يكون $x+3 \geq 0$ و $x+1 > 0$

$\ln(x+1) \neq 0$ وهذا يعني $x \geq -3$ و $x-1 > 0$ و $x+1 \neq 1$

أي $x \geq -3$ و $x \geq -1$ و $x \neq 0$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

(ب) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x \ln(x)}$ معنى يجب أن يكون $x > 0$ و $\ln(x) \neq 0$

أي $x > 0$ و $x \neq 1$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

تطبيق 3

تعيين عبارة دالة

دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = ax + b + \frac{1}{x} \ln x$ مع a و b

عندان حقيقيتان، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس، $A(1, 0)$

نقطة من (C_f) ، المماس لـ (C_f) في A يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = 3x + 2$

(1) احسب من أجل كل x من $]0, +\infty[$ عبارة $f'(x)$

(2) بين أن $f'(1) = 3$ ، ثم استنتج أن $a + 1 = 3$

(3) بين أن $a + b = 0$ ، ثم استنتج عبارة $f(x)$

✓ الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا :

$$f'(x) = a + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = a + \frac{1}{x^2} [-\ln(x) + 1]$$

(2) بما أن المماس للمنحني (C_f) عند A يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = 3x + 2$

فإن ميله هو 3 وعليه فإن $f'(1) = 3$

لدينا $f'(1) = a + \frac{1}{1^2} [-\ln(1) + 1] = a + 1 = 3$ ومنه نستنتج أن $a + 1 = 3$

ب) يمان $A(1,0)$ تنتمي إلى (C_f) فإن $f(1)=0$
 $f(1)=0$ يكافئ $a+b=0$

لدينا $\begin{cases} a+1=3 \\ a+b=0 \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$ إذن $f(x)=2x-2+\frac{1}{x}\ln(x)$

تطبيق 4

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{3}{x}+\ln x$

(1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم احسب $f'(x)$

(2) شكل جدول تغيرات f ثم استنتج أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $f(x) > 0$

الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-3+x}{x^2}$

(2) إشارة $f'(x)$ من إشارة $-3+x$ لأن المقام موجب تماماً وعلية .

x	0	3	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f		$f(3)$	

إذا كان $x=3$ فإن $f'(3)=0$

إذا كان $x > 3$ فإن $f'(x) > 0$

إذا كان $x < 3$ فإن $f'(x) < 0$

لدينا $f(3)=1+\ln 3$

وبما أن $\ln 3 > 0$ فإن $f(3) > 0$

نستنتج من جدول تغيرات f أنه من أجل كل $x > 0$ لدينا $f(x) \geq f(3)$ أي $f(x) > 0$

تطبيق 5

f, g, h ثلاث دوال معرفة على $]0, +\infty[$:

$h(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$, $g(x)=\frac{\ln x}{x}$, $f(x)=x \ln x$

عبر $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$

الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ومن أجل كل $x > 0$ لدينا $f'(x)=\ln x + \frac{1}{x} \times x = 1 + \ln x$ أي $f'(x)=1+\ln x$

ب) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

ج) الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$

هما $x \xrightarrow{h_1} \frac{x}{x+1}$ و $x \xrightarrow{h_2} \ln x$ مع $(h = h_2 \circ h_1)$

ومن أجل كل $x > 0$ لدينا $H(x)=\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}=\frac{1}{x(x+1)}$

تطبيق 6 تبسيط أعداد باستعمال لوغاريتم الجداء

تبسيط الأعداد التالية :

$$\ln(\sqrt{5}+2)+\ln(\sqrt{5}-2) , \ln\left(\frac{1}{5}\right) , \ln(4)+\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\ln(567)-\ln(72)-\ln\frac{7}{8}+\ln\left(\frac{1}{27}\right) , \ln(\sqrt{17}+4)-\ln(\sqrt{17}-4)$$

$$\ln\sqrt{135}+\ln\sqrt{75}-\ln 5-\ln\sqrt{27} , \ln\sqrt{\sqrt{5}+2}+\ln(\sqrt{\sqrt{5}-2})$$

الحل

$$\ln(4)+\ln\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\left(4 \times \frac{1}{4}\right)=\ln(1)=0$$

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right)=-\ln(5)$$

$$\ln(\sqrt{5}+2)+\ln(\sqrt{5}-2)=\ln(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=\ln(5-4)=\ln(1)=0$$

$$\ln(\sqrt{17}+4)-\ln(\sqrt{17}-4)=\ln\left(\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right)=\ln\left(\frac{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{17-16}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)=-2\ln(\sqrt{17}-4)$$

$$\ln(\sqrt{\sqrt{5}+2})+\ln(\sqrt{\sqrt{5}-2})=\ln(\sqrt{\sqrt{5}+2})(\sqrt{\sqrt{5}-2})$$

$$=\ln(\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)})=\ln(\sqrt{5-4})=\ln\sqrt{1}=0$$

$$\ln 567 - \ln 72 - \ln\left(\frac{7}{8}\right) + \ln\left(\frac{1}{27}\right) = \ln(3^3 \times 7) - \ln(2^3 \times 3^2) - \ln\frac{7}{8} - \ln(27)$$

$$=4\ln(3) + \ln(7) - 3\ln(2) - 2\ln(3) - \ln(7) + 3\ln(2) - 3\ln(3)$$

تطبيق 8

تعيين مجموعة تكون فيها مساواة صحيحة

عين مجموعة الأعداد x التي من أجلها تكون المساواة صحيحة في كل حالة من الحالات التالية:

$$\ln(x^2-1) = \ln(x+1) + \ln(x-1) \quad (\text{أ}) \quad \ln(2+x) = \ln x + \ln\left(\frac{2}{x}+1\right) \quad (\text{ب})$$

$$\ln(x^2) = 2 \ln(-x) \quad (\text{ج}) \quad \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-2) \quad (\text{د})$$

الحل

حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$$x > 0 \quad \text{و} \quad x+2 > 0 \quad \text{و} \quad \frac{2}{x}+1 > 0$$

$$\text{أي} \quad x > -2 \quad \text{و} \quad x > 0 \quad \text{و} \quad x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]0, +\infty[$

حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون $x^2-1 > 0$ و $x+1 > 0$ و $x-1 > 0$

$$\text{أي} \quad x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\quad \text{و} \quad x > -1 \quad \text{و} \quad x > 1$$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]1, +\infty[$

حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$$\frac{x+1}{x-2} > 0 \quad \text{و} \quad x-2 > 0 \quad \text{و} \quad x+1 > 0$$

$$\text{أي} \quad x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[\quad \text{و} \quad x > 2 \quad \text{و} \quad x > -1$$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]2, +\infty[$

حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون $x^2 > 0$ و $-x > 0$

$$\text{أي} \quad x \in]-\infty, 0[\quad \text{و} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]-\infty, 0[$

تطبيق 9

حل معادلات

حل المعادلات التالية:

$$\ln(3x+2) = -1 \quad (\text{أ}) \quad \ln(3x+2) = 1 \quad (\text{ب}) \quad \ln(3x+2) = 0 \quad (\text{ج})$$

$$\ln(x-2) + \ln(x-32) = 6 \ln 2 \quad (\text{د}) \quad \ln(3x-2) = 2 \quad (\text{هـ})$$

$$\ln(-2x+5) + \ln(4x-5) = -\ln 3 \quad (\text{و})$$

تطبيق 7

إثبات صحة مساواة

برهن أنه من أجل كل $x > 0$ يكون لدينا:

$$\ln(2+x^2) = 2 \ln x + \ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right) \quad (\text{أ}) \quad \ln(x+2) = \ln x + \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \quad (\text{ب})$$

$$\ln(x^2+x+1) = 2 \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \quad (\text{ج})$$

$$\ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right) \quad (\text{د})$$

الحل

$$\ln(x+2) = \ln(x) \left(1+\frac{2}{x}\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \quad (\text{أ})$$

$$\ln(2+x^2) = \ln(x^2) \left(\frac{2}{x^2}+1\right) = \ln x^2 + \ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right) \quad (\text{ب})$$

$$= 2 \ln x + \ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$$

$$\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2) \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \quad (\text{ج})$$

$$= 2 \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{1+\frac{1}{x}}\right) \quad (\text{د})$$

✓ الحل

(أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x+2 > 0$ أي $x > -\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]-\frac{2}{3}, +\infty[$

$$\ln(3x+2) = \ln(1) \text{ تعني } \ln(3x+2) = 0$$

ومنه نستنتج $3x+2=1$ أي $x = -\frac{1}{3}$

بما أن $-\frac{1}{3} \in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة $\ln(3x+2)=0$ هي $S = \{-\frac{1}{3}\}$

(ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x+2 > 0$ أي $x > -\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (المجموعة المرجعية) هي $D =]-\frac{2}{3}, +\infty[$

$$\ln(3x+2) = \ln(e) \text{ تعني } \ln(3x+2) = 1$$

$$3x+2 = e \text{ ومنه ينتج}$$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x = \frac{e-2}{3}$

بما أن $\frac{e-2}{3} \in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{\frac{e-2}{3}\}$

(ج) المجموعة المرجعية هي $D =]-\frac{2}{3}, +\infty[$

$$\ln(3x+2) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) \text{ نكتب } \ln(3x+2) = -1$$

ومنه ينتج $3x+2 = \frac{1}{e}$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x = \frac{1}{3e} - \frac{2}{3}$

بما أن $\frac{1}{3e} - \frac{2}{3} \in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{\frac{1}{3e} - \frac{2}{3}\}$

(د) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x-2 > 0$ أي $x > \frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]\frac{2}{3}, +\infty[$

$$\ln(3x-2) = \ln(e^2) \text{ نكتب } \ln(3x-2) = 2$$

ومنه نستنتج $3x-2 = e^2$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x = \frac{e^2+2}{3}$

بما أن $\frac{e^2+2}{3} > \frac{2}{3}$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{\frac{e^2+2}{3}\}$

(هـ) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون

$$x-2 > 0 \text{ و } x-32 > 0 \text{ أي } x > 2 \text{ و } x > 32$$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]32, +\infty[$

$$\ln(x-2) + \ln(x-32) = 6 \ln(2) \text{ نكتب } \ln(x-2) + \ln(x-32) = \ln(2^6)$$

$$\text{أي } (x-2)(x-32) = 64 \text{ بالتبسيط نجد } x^2 - 34x = 0$$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=0$ أو $x=34$

بما أن 0 لا ينتمي إلى D فهو مرفوض

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{34\}$

(و) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون

$$-2x+5 > 0 \text{ و } 4x-5 > 0 \text{ أي } x < \frac{5}{2} \text{ و } x > \frac{5}{4}$$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]\frac{5}{4}, \frac{5}{2}[$

$$\ln(-2x+5) + \ln(4x-5) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \text{ نكتب } \ln(-2x+5) + \ln(4x-5) = -\ln(3)$$

$$\text{و منه ينتج } (-2x+5)(4x-5) = \frac{1}{3} \text{ بالتبسيط نجد } -24x^2 + 90x - 76 = 0$$

$$\Delta = 804 \text{ مميز المعادلة } -24x^2 + 90x - 76 = 0 \text{ هو}$$

$$\Delta > 0 \text{ فإن للمعادلة حلان } x_1 = \frac{-90 + \sqrt{804}}{-48} \text{ و } x_2 = \frac{-90 - \sqrt{804}}{-48}$$

x_1 و x_2 ينتميان إلى D

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة $\ln(-2x+5) + \ln(4x-5) = -\ln(3)$ هي $S = \{x_1, x_2\}$

حل معادلات

⑩ تطبيق

حل المعادلات التالية

$$(أ) \ln x = \ln(x^2 + 4x) \quad (ب) 2 \ln(x+1) = \ln(x+5) + \ln(2x+2)$$

$$(ج) \ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln(x+10)$$

$$(د) \ln(\sqrt{3x-1}) + \ln(\sqrt{x-1}) = \ln(x-2)$$

✓ الحل

(أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $x > 0$ و $x^2 + 4x > 0$

$$\text{أي } x > 0 \text{ و } x \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]0, +\infty[$

تطبيق 11

حل متراجحات

حل المتراجحات التالية:

$$(1) \quad \ln(2x-4) \geq 0 \quad (ب) \quad \ln(2x-4) > 1 \quad (ج) \quad \ln(x-4) \geq \ln 2$$

$$(د) \quad 3 \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq 36 \quad (هـ) \quad (\ln x)^2 \leq 36$$

الحل

- أ) حتى تكون للمتراجحة (1) معنى يجب أن يكون $2x-4 > 0$ أي $x > 2$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (1) هي $D =]2, +\infty[$.
- المتراجحة $\ln(2x-4) \geq 0$ تكتب $\ln(2x-4) \geq \ln 1$ ومنه ينتج $2x-4 \geq 1$ أي $x \geq \frac{5}{2}$ إذن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[\cap D = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
- (ب) حتى تكون للمتراجحة (ب) معنى يجب أن يكون $2x-4 > 0$ أي $x > 2$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $D =]2, +\infty[$.
- المتراجحة $\ln(2x-4) \geq 1$ تكافئ $2x-4 \geq e$ أي $x \geq \frac{e+4}{2}$ إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = \left[\frac{e+4}{2}, +\infty\right[\cap D = \left[\frac{e+4}{2}, +\infty\right[$.
- (ج) حتى تكون للمتراجحة (ج) معنى يجب أن يكون $x-4 > 0$ أي $x > 4$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ج) هي $D =]4, +\infty[$.
- المتراجحة $\ln(x-4) \geq \ln 2$ تكافئ $x-4 \geq 2$ أي $x \geq 6$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي $S = [6, +\infty[\cap D = [6, +\infty[$.
- (د) حتى يكون للمتراجحة (د) معنى يجب أن يكون $\frac{1}{x} > 0$ أي $x > 0$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $D =]0, +\infty[$.
- المتراجحة $3 \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq 36$ تكافئ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq 12$ ومنه ينتج $\frac{1}{x} \leq e^{12}$ إذن مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S = \left(\frac{1}{e^{12}}, +\infty\right[\cap D = \left(\frac{1}{e^{12}}, +\infty\right[$.
- (هـ) حتى يكون للمتراجحة (هـ) معنى يجب أن يكون $x > 0$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (هـ) هي $D =]0, +\infty[$.
- المتراجحة $(\ln x)^2 \leq 36$ تكافئ $-6 \leq \ln x \leq 6$ وهذه الأخيرة تكافئ: $e^{-6} \leq x \leq e^6$ وبما أن الدالة \ln متزايدة تماما فإنه ينتج $x \in [e^{-6}, e^6]$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S = [e^{-6}, e^6] \cap D = [e^{-6}, e^6]$.

المساواة $\ln(x) = \ln(x^2+4x)$ تكتب $x = x^2+4x$ أي $x^2+3x=0$

$x^2+3x=0$ تكافئ $x=0$ أو $x=-3$

بما أن 0 و -3 لا ينتميان إلى D

فإن المعادلة $\ln x = \ln(x^2+4x)$ ليس لها حلول.

(ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون:

$x+1 > 0$ و $x+5 > 0$ و $2x+2 > 0$ أي $x > -1$ و $x > -5$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]-1, +\infty[$

المساواة $\ln(x+1)^2 = \ln(x+5)(2x+2)$ تكتب $2\ln(x+1) = \ln(x+5) + \ln(2x+2)$

ومنه ينتج $x^2+10x+9=0$ (1)

بما أن مميز المعادلة (1) هو $\Delta=64$ فإن للمعادلة حلان هما $x_1=-1$ و $x_2=-9$

بما أن x_1 و x_2 لا ينتميان إلى D

فإن المعادلة (ب) ليس لها حلول.

(ج) حتى تكون للمساواة (ج) لها معنى يجب أن يكون:

$x+2 > 0$ و $x+1 > 0$ و $x+10 > 0$

أي $x > -1$ ينتمي إلى $]-1, +\infty[$ ومنه $D =]-1, +\infty[$

المساواة $\ln(x+2)(x+1) = \ln(x+10)$ تكتب $\ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln(x+10)$

ومنه ينتج $(x+2)(x+1) = x+10$ بالتبسيط نجد $x^2+2x-8=0$... (2)

مميز المعادلة (2) هو $\Delta=36$

ومنه المعادلة (2) لها حلان هما $x_1=2$ و $x_2=-4$

بما أن $2 \in D$ و $-4 \notin D$

فإن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي $S = \{2\}$.

(د) حتى تكون للمساواة (د) لها معنى يجب أن يكون:

$3x-1 > 0$ و $x-1 > 0$ و $x-2 > 0$ أي $x > \frac{1}{3}$ و $x > 1$ و $x > 2$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D =]2, +\infty[$

المعادلة (د) تكتب على الشكل $\ln(\sqrt{3x-1} \times \sqrt{x-1}) = \ln(x-2)$

أي $\ln \sqrt{(3x-1)(x-1)} = \ln(x-2)$ ومنه ينتج $\sqrt{(3x-1)(x-1)} = x-2$

بتربيع الطرفين نجد $(3x-1)(x-1) = x^2-4x+4$ وبالتبسيط نجد $2x^2-3=0$

حلول المعادلة $2x^2-3=0$ هما $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ و $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

بما أن $\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ لا ينتميان إلى D

فإن مجموعة حلول المعادلة (د) هي \emptyset .

ومنه مجموعة تعريف التراجحة (ج) هي $D =]\frac{1}{3}, +\infty[$

التراجحة (ج) تكتب على الشكل $\ln(3x^2 - x) \leq \ln(2x)$ ومنه ينتج $3x^2 - x \leq 2x$

بعد التبسيط نجد $3x(x-1) \leq 0$

$3x(x-1) \leq 0$ يكافئ $x \in [0, 1]$

ومنه مجموعة حلول التراجحة (ج) هي $S = D \cap [0, 1] =]\frac{1}{3}, 1]$

حتى يكون للمراجحة (د) معنى يجب أن يكون $4-x > 0$ و $x > 0$

أي $x < 4$ و $x > 0$ ومنه مجموعة تعريف التراجحة (د) هي $D =]0, 4[$

التراجحة (د) تكتب على الشكل $\ln \frac{(4-x)(x)}{3} \geq \ln(1)$ ومنه ينتج $\frac{(4-x)(x)}{3} \geq 1$

بعد التبسيط نجد $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ (2)

ممميز $(-x^2 + 4x - 3)$ هو 4 ومنه للمعادلة $-x^2 + 4x - 3 = 0$ حلان هما 1 و 3

$-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ إذا وفقط إذا كان $x \in [1, 3]$

ومنه مجموعة حلول التراجحة (د) هي $S = D \cap [1, 3] = [1, 3]$

حل معادلات تشمل القيمة المطلقة

تطبيق 15

حل المعادلات التالية:

(أ) $\ln(|x-1|) + \ln(x+5) = 3\ln(2)$ (ب) $\ln(|x-1|) + \ln(x+1) = 0$

(ج) $\ln(|2x+5|) + \ln(|x|) = 2\ln(|x+1|)$

(د) $\ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right) + 1 = 0$

الحل

(أ) حتى يكون للمعادلة (أ) معنى يجب أن يكون $|x-1| > 0$ و $|x+1| > 0$

أي $x \neq 1$ و $x \neq -1$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (أ) هي $D = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

المعادلة (أ) تكتب على الشكل $\ln(|x-1||x+1|) = \ln(8)$ ومنه ينتج (1) $|x^2-1| = 8$

$|x^2-1| = 8$ يكافئ $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$ أو $x = 0$

ومنه حلول المعادلة (1) هي $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0$

بما أن $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0$ ينتميان إلى D فإن مجموعة حلول المعادلة (أ) هي

$S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\}$

تطبيق 16

حل متراجحات

حل المتراجحات التالية:

(أ) $3\ln(x+1) > \ln(3x+1)$ (ب) $\ln(3x^2+5x) \geq \ln(6x+10)$

(ج) $\ln(4-x) - \ln 3 + \ln x \geq 0$ (د) $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$

الحل

(أ) حتى يكون للمراجحة (أ) معنى يجب أن يكون $3x^2+5x > 0$ و $6x+10 > 0$

أي $x > -\frac{5}{3}$ و $x \in]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]0, +\infty[$

إذن مجموعة تعريف التراجحة (أ) هي $D =]0, +\infty[$

التراجحة $\ln(3x^2+5x) \geq \ln(6x+10)$ تكافئ $3x^2+5x \geq 6x+10$

أي $3x^2-x-10 \geq 0$ (1)

ممميز كثير الحدود $(3x^2-x-10)$ هو $\Delta = 121$

ومنه للمعادلة $3x^2-x-10=0$ حلان هما $x_1 = 2$ و $x_2 = -\frac{5}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	2	$+\infty$
$3x^2-x-10$	+	-	+	+

من الجدول المجاور نستنتج أن

مجموعة حلول التراجحة (1)

هي

$S = \left(]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]2, +\infty[\right) \cap]0, +\infty[$

(ب) حتى يكون للمراجحة (ب) معنى يجب أن يكون

$x+1 > 0$ و $3x+1 > 0$ أي $x > -1$ و $x > -\frac{1}{3}$

ومنه مجموعة تعريف التراجحة (ب) هي $D =]-\frac{1}{3}, +\infty[$

التراجحة $3\ln(x+1) > \ln(3x+1)$ تكافئ $\ln(x+1)^3 > \ln(3x+1)$

ومنه ينتج $(x+1)^3 > 3x+1$ بالتبسيط نجد $x^3(x+3) > 0$ (2)

ومجموعة حلول التراجحة (2) هي $]-3, 0[\cup]0, +\infty[$

إذن مجموعة حلول التراجحة (ب) هي $S = D \cap (]-3, 0[\cup]0, +\infty[) =]-\frac{1}{3}, 0[\cup]0, +\infty[$

(ج) حتى يكون للمراجحة (ج) معنى يجب أن يكون $3x^2-x > 0$ و $x > 0$

أي $x > 0$ و $x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

المعادلة (د) تكتب على الشكل $\ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right) = \ln e^{-1}$ ومنه ينتج (4) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = e^{-1}$...
 - إذا كان $x \in]-2, 1[$ فإن المعادلة (4) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1} = -e^{-1}$
 بالتبسيط نجد $x = \frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}$ وهذا الحل مقبول لأنه ينتمي إلى $] -2, 1[$
 - إذا كان $x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -2[$ فإن المعادلة (4) تكتب $\frac{x+2}{x-1} = e^{-1}$
 بالتبسيط نجد $x = \frac{2e+1}{1-e}$ وهذا حل مقبول لأنه ينتمي إلى $] -2, -\infty[$
 إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $S = \left\{ \frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}, \frac{2e+1}{1-e} \right\}$

تطبيق 14

حل متراجحات تشمل القيمة المطلقة

حل المتراجحات التالية:
 (أ) $\ln|x+2| - \ln|x-1| + 1 > 0$ (ب) $\ln|x-1| + \ln|x+1| \leq 0$
 (ج) $\ln(|2x+5|) + \ln(|x|) \geq 2\ln(|x+1|)$

الحل

المجموعة المرجعية للمتراجحة (أ) هي $D = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$ تكتب على الشكل:
 $\ln(|x-1||x+1|) \leq \ln(1)$ ومنه ينتج $|(x-1)(x+1)| \leq 1$... (1)
 - إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2 \geq 0$
 ومنه مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S_1 =]-1, 1[$
 - إذا كان $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2 \leq 2$
 ومجموعة حلولها هي $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
 ومنه مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S_1 =]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[$
 وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S = S_1 \cup S_2$
 المجموعة المرجعية للمتراجحة (ب) هي $D = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$
 من أجل كل x من D المتراجحة (ب) تكتب على الشكل:
 $\ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right) \geq \ln(e^{-1})$ ومنه ينتج (2) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geq e^{-1}$...
 - إذا كان $x \in]-2, 1[$ فإن المتراجحة (2) تكتب على الشكل $-\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \geq e^{-1}$

(ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي $D =]-5, 1[\cup]1, +\infty[$
 المعادلة (ب) تكتب $\ln|x-1|(x+5) = \ln(8)$ ومنه ينتج $|x-1|(x+5) = 8$... (2)
 - إذا كان $x \in]1, +\infty[$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2 + 4x + 3 = 0$
 وحلا هذه الأخيرة هما $x = -1$ و $x = -3$
 وبما أن -1 و -3 ينتميان إلى $] -5, 1[$ فهما مقبولان.
 - إذا كان $x \in]-5, 1[$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2 + 4x - 13 = 0$
 وحلا هذه الأخيرة هما $\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$ و $\frac{-4+2\sqrt{17}}{2}$
 $\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$ مرفوض لأنه ليس أكبر من الواحد.

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S = \left\{ \frac{-4+2\sqrt{17}}{2}, -1, -3 \right\}$

(ج) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب أن يكون $|2x+5| > 0$ و $|x| > 0$ و $|x+1| > 0$
 أي $x \neq -\frac{5}{2}$ و $x \neq 0$ و $x \neq -1$

ومنه فإن مجموعة تعريف المعادلة (ج) هي $D = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{2}, 0, -1 \right\}$

المعادلة (ج) تكتب على الشكل $\ln(|2x+5||x|) = \ln(|x+1|^2)$
 ومنه ينتج $|x(2x+5)| = (x+1)^2$... (3)

- إذا كان $x \in]-\frac{5}{2}, -1[\cup]-1, 0[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل $3x^2 + 7x + 1 = 0$

وحلا هذه الأخيرة هما $x_1 = \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ و $x_2 = \frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

x_1 و x_2 ينتميان إلى $]-\frac{5}{2}, 0[$ فهما مقبولان

- إذا كان $x \in]0, +\infty[\cup]-\infty, -\frac{5}{2}[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل

$x^2 + 3x - 1 = 0$ وحلا هذه الأخيرة هما $x_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ و $x_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

x_3 و x_4 مقبولان لأنهما ينتميان إلى $]0, +\infty[\cup]-\infty, -\frac{5}{2}[$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

(د) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب أن يكون $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 0$ و $x-1 \neq 0$

أي $x \neq -2$ و $x \neq 1$ ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D = \mathbb{R} - \{1, -2\}$

✓الحل

(1) مميز المعادلة (1) هو $\Delta = 36$ ومنه المعادلة (1) لها حلان هما $x_1 = 1$ و $x_2 = -5$

(2) $g(x) = 0$ يكافئ $X^2 + 4X - 5 = 0$ يكافئ $(X-1)(X+5) = 0$ يكافئ $X=1$ أو $X=-5$

$X=1$ يكافئ $\ln x = \ln e$ يكافئ $x=e$

$X=-5$ يكافئ $\ln x = \ln e^{-5}$ يكافئ $x=e^{-5}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $g(x) = 0$ هي $S = \{e, e^{-5}\}$

(3) $g(x) = X^2 + 4X - 5 = (X-1)(X+5) = (\ln(x)-1)(\ln(x)+5)$

x	$-\infty$	e^{-5}	e	$+\infty$
$\ln(x)-1$	-	-	+	+
$\ln(x)+5$	-	-	+	+
$g(x)$	+	-	+	+

$g(x) \geq 0$ يكافئ

$x \in]-\infty, e^{-5}] \cup [e, +\infty[$

ومنه مجموعة حلول

المعادلة $g(x) \geq 0$ هي

$]-\infty, e^{-5}] \cup [e, +\infty[$

حل معادلات ومترابحات

تطبيق 15

من أجل كل x من \mathbb{R} نضع $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 6$

(1) نتحقق أن $p(1) = 0$

(ب) استنتج أنه نستطيع كتابة $p(x) = (x-1)\varphi(x)$

وهنا من أجل كل x من \mathbb{R} مع $\varphi(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

(ج) حل المترابطة $p(x) \leq 0$

(2) استعمل النتائج السابقة لحل المترابطة

(د) $2 \ln x + \ln(2x+3) \leq \ln(6-x)$

✓الحل

(1) لدينا $p(1) = 2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 + 1 - 6 = 6 - 6 = 0$

(ب) بما أن 1 جذر $p(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $\varphi(x)$ درجته 2

بحيث من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $p(x) = (x-1)\varphi(x)$ و $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$

بما أن معامل x^3 في $p(x)$ هو 2 فإن $a=2$

بغض النظر $\varphi(x) = (x-1)(2x^2 + bx + c)$ و مطابقته مع $p(x)$ نجد $b=5$ و $c=6$

إذن $p(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 6)$

بالتبسيط نجد $x \geq \frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1}$ ومنه مجموعة حلول المترابطة (2) هي $S_1 = \left[\frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1}, 1 \right]$

- إذا كان $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ فإن المترابطة (2) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1} \geq e^{-1}$

بالتبسيط نجد $\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)} \geq 0$

ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $S_2 =]-\infty, \frac{2e+1}{1-e}] \cup]1, +\infty[$

x	$-\infty$	$\frac{2e+1}{1-e}$	-2	1	$+\infty$
$\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)}$	+	+	-	-	+

و بالتالي مجموعة حلول المترابطة (ب) هي $S = S_1 \cup S_2$

(ج) المجموعة المرجعية للمترابطة (ج) هي $D = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{2}, 0, -1 \right\}$

من أجل كل x من D للمترابطة (ج) تكتب على الشكل:

$$\ln(|2x+5|) |x| \geq \ln(|x+2|)^2$$

ومنه ينتج $|x(2x+5)| \geq (x+1)^2$ (3)...

- إذا كان $x \in]-\frac{5}{2}, 0[\cup]-1, +\infty[$ فإن (3) تكتب على الشكل $3x^2 + 7x + 1 \leq 0$ ومجموعة

حلول هذه الأخيرة هي $S_1 = [x_2, x_1] - \{-1\}$ مع $x_1 = \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ و $x_2 = \frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

- إذا كان $x \in]0, +\infty[\cup]-\infty, -\frac{5}{2}]$ فإن (3) تكتب على الشكل $x^2 + 3x - 1 \geq 0$

ومجموعة حلول هذه المترابطة هي $S_2 =]-\infty, x_3] \cup [x_4, +\infty[$

حيث $x_3 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ و $x_4 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

بالتالي مجموعة حلول المترابطة (ج) هي $S = S_1 \cup S_2$

حل معادلات ومترابحات

تطبيق 15

(1) حل المعادلة $x^2 + 4x - 5 = 0$... (1)

(2) لنفرض $g(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 5$ حيث $g(x) = 0$

بوضع $X = \ln(x)$ حل المعادلة $g(x) = 0$... (2)

(3) حل المترابطة $g(x) \geq 0$

18 تطبيق

حل جملة معادلتين

$$(I) \dots \begin{cases} xy=4 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2} (\ln 2)^2 \end{cases}$$

حل في \mathbb{R}^2 الجملة التالية

$$(II) \dots \begin{cases} x+y=19 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 + \ln 15 \end{cases}$$

الحل

(I) مجموعة التعريف الجملة (I) هي مجموعة الثنائيات (x, y) بحيث $x > 0$ و $y > 0$.

$$(I) \dots \begin{cases} xy=4 \dots (1) \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2} (\ln 2)^2 \dots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد $y = \frac{4}{x}$ نعوضه في (2) نجد $(\ln x)^2 + \left(\ln \frac{4}{x}\right)^2 = \frac{5}{2} (\ln 2)^2$

بعد التبسيط نجد (*) $2(\ln x)^2 - (4 \ln 2) \times (\ln x) + \frac{3}{2} (\ln 2)^2 = 0$

بوضع $\ln(x) = X$ في (*) نجد (**) $2X^2 - (4 \ln 2)X + \frac{3}{2} (\ln 2)^2 = 0$

ممميز العادلة (**) هو $\Delta = (2 \ln 2)^2$

اذن العادلة (**) لها حلان هما $X_1 = \frac{3}{2} \ln 2 = \ln \left(\frac{3}{2}\right)$ و $X_2 = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \left(\frac{1}{2}\right)$

$\ln x = X_1$ يكافئ $x = e^{X_1} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

$\ln x = X_2$ يكافئ $x = e^{X_2} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

لا $x = 2\sqrt{2}$ فإن $y = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

لا $x = \sqrt{2}$ فإن $y = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

ومنه مجموعة حلول الجملة (I) هي $S = \{(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (2\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$

$$(II) \dots \begin{cases} x+y=19 \dots (3) \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 + \ln 15 \dots (4) \end{cases}$$

مجموعة تعريف الجملة (II) هي $D = (\mathbb{R}^+)^2$

نجد (3) نجد $y = 19 - x$ نعوض في (4) نجد $\ln x + \ln(19 - x) = \ln 4 + \ln 15$

وحسب قواعد جلاء اللوغاريتمات نجد $\ln(-x^2 + 19x) = \ln 60$

ج) لحل التراجحة $p(x) \leq 0$ نعين إشارة $p(x)$

$p(x) = 0$ يكافئ $(x=1)$ او $(2x^2 + 5x + 6 = 0)$

ممميز العادلة $2x^2 + 5x + 6 = 0$ يساوي -23

ومنه العادلة $2x^2 + 5x + 6 = 0$ ليس لها حلول وإشارة $(2x^2 + 5x + 6)$ موجبة تماما.

$p(x) \leq 0$ إذا وفقط إذا كان $x \leq 1$

ومنه مجموعة حلول التراجحة $p(x) \leq 0$ هي $S =]-\infty, 1]$

مجموعة تعريف التراجحة (I) هي $D =]0, 6]$

من أجل كل x^* من D التراجحة (I) تكتب على الشكل:

$$(II) \dots 2x^3 + 3x^2 + x - 6 \leq 0 \text{ ومنه ينتج } \ln(x^2)(2x+3) \leq \ln(6-x)$$

مجموعة حلول التراجحة (II) هي $] -\infty, 1]$

وبالتالي مجموعة حلول التراجحة (I) هي

$$S' =]-\infty, 1] \cap]0, 6] =]0, 1]$$

17 تطبيق

حل جملة معادلات

$$(I) \dots \begin{cases} 3x+5y=11 \\ x-7y=-5 \end{cases}$$

$$(II) \dots \begin{cases} 3 \ln x + 5 \ln y = 11 \\ \ln x - 7 \ln y = -5 \end{cases}$$

الحل

$$(I) \dots \begin{cases} 3x+5y=11 \dots (1) \\ x-7y=-5 \dots (2) \end{cases}$$

بضرب (2) في -3 ثم نجمعها مع (1) نجد $26y = 26$

ومنه $y = 1$ و بتعويض قيمة y أي (1) نجد $x = 2$

اذن مجموعة حلول الجملة (I) هي $S = \{(2, 1)\}$

(II) مجموعة تعريف الجملة (II) هي مجموعة الثنائيات (x, y) بحيث $x > 0$ و $y > 0$

بوضع $X = \ln x$ و $Y = \ln y$ الجملة (II) تصبح كما يلي

$$\begin{cases} 3X+5Y=11 \\ X-7Y=-5 \end{cases}$$

من السؤال الأول نجد $X = 2$ و $Y = 1$

$X = 2$ يكافئ $\ln x = 2$ يكافئ $x = e^2$

$Y = 1$ يكافئ $\ln y = 1$ يكافئ $y = e$

ومنه مجموعة حلول الجملة (II) هي $S_2 = \{(e^2, e)\}$

إحداثيات النقطة I منتصف $[AB]$ هي $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{\ln a + \ln b}{2}\right)$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2} \quad \text{بما أن}$$

فإن النقطة $M\left(\frac{a+b}{2}, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ من (C_f) تقع فوق النقطة I . وهذا يعني أن الدالة \ln محدبة.

حساب النهايات

تطبيق 20

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة f في المكان المعطى.

(أ) $x=0, f(x)=\frac{\ln x}{x}$ (ب) $x=0, f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ عند $x=0$

(ج) $x=0, f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ عند $(+\infty)$ (د) $x=0, f(x)=\frac{x}{\ln x}$ عند $(+\infty)$

(هـ) $x \rightarrow +\infty, f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$ عند $(+\infty)$ (و) $x \rightarrow +\infty, f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ عند $(+\infty)$

(ز) $x \rightarrow +\infty, f(x)=2x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$

الحل

(أ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

(د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)} = +\infty$

(هـ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1} = 0$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

ومنه ينتج $-x^2 + 19x - 60 = 0$ (أ)

ممیز المعادلة (أ) هو $\Delta = 121$ ومنه المعادلة (أ) لها حلان هما $x_1 = 15$ ، $x_2 = 4$

لأن $x = 4$ فإن $y = 19 - 4 = 15$ ولأن $x = 15$ فإن $y = 19 - 15 = 4$

ومنه مجموعة حلول الجملة (II) هي $S' = \{(4, 15), (15, 4)\}$

تطبيق 19

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و نجعل من أجل كل عددين حقيقيين

a و b من I $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$ نقول عن f أنها محدبة.

(1) بين أنه من أجل كل $a > 0$ و $b > 0$ يكون $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(ب) استنتج أنه من أجل كل $a > 0$ و $b > 0$ يكون

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[\ln a + \ln b]$$

(2) انشئ التمثيل البياني (C_f) للدالة $x \mapsto \ln x$ مميّنا عليه نقطتين A و B

فاصلتهما a و b على التوالي.

ما هي وضعية منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى (C_f) ؟

الحل

(1) نعلم أن $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ و عليه يكون $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

بإضافة $4ab$ إلى طرفي المتباينة نجد $a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$

و بقسمة الطرفين على 4 نجد $\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} \geq ab$

و بجذر الطرفين نجد $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

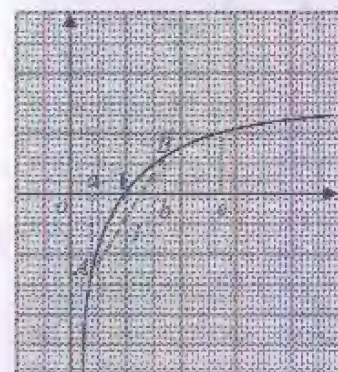
(ب) لدينا $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ و بما أن الدالة \ln

متزايدة تماماً على $]0, +\infty[$

فإن $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \ln\sqrt{ab}$ ولكن،

$$\ln(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}\ln(ab) = \frac{1}{2}[\ln a + \ln b]$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[\ln a + \ln b]$$



ج) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\ln x} = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 0^+$

د) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

هـ) $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x+1}{1 - \ln x} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow e} (1 - \ln x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow e} (x+1) = e+1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \times \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x} - 1} = -\infty \end{aligned}$$

حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

تطبيق 22

عين في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f في المكان المعطى.

أ) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$

ج) $f(x) = \frac{x+1 + \ln(x+2)}{x+1}$ عند -1 ، د) $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x^2-1}$ عند 1

الحل

أ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التحديد.

بوضع $g(x) = \ln x$ تكون $f(x) = \frac{g(x) - g(1)}{x-1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق عند 1

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1)$

و) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x} = 0$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0^+$

ن) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \frac{1}{x} \ln(1+x) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty$

$X = \frac{1}{x}$ و x يؤول إلى $+\infty$ فإن $X \rightarrow 0$.

حساب النهايات

تطبيق 21

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة f عند أطراف المجال I

أ) $I =]0, +\infty[$ ، $f(x) = x(2 - \ln x)$

ب) $I =]-\infty, -3[$ ، $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$

ج) $I =]1, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x+2}{\ln x}$

د) $I =]0, +\infty[$ ، $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$

هـ) $I =]e, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x+1}{1 - \ln x}$

الحل

أ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [2x - x \ln(x)] = 0$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x-2} = 1$

د) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x-2} = 0^+$

من أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا $g'(x) = \frac{1}{x}$ ومنه $g'(1) = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \times 0$ حالة عدم التعيين

بوضع $X = \frac{1}{x}$ تكون $f(x) = \frac{\ln(1+X)}{X}$ و $0 < X \leq 1$ فإن $0 < X \leq 1$

بوضع $g(X) = \ln(1+X)$ تصبح $\frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{g(X) - g(0)}{X - 0}$

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 ولدينا $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{g(X) - g(0)}{X - 0} = g'(0)$

ولكون $g'(0) = 1$ نجد $g'(X) = \frac{1}{1+X}$

وبالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = g'(0) = 1$

(ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

بوضع $g(x) = x+1 + \ln(x+2)$ نكتب $f(x) = \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$ على الشكل

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-2, +\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند -1

إذن $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = g'(-1)$

من أجل كل x من $]-2, +\infty[$ لدينا $g'(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$

ومنه $g'(-1) = 2$ إذن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = 2$

(د) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

بوضع $g(x) = \ln(x) - 1$ نكتب $f(x) = \frac{g(x) - g(1)}{x-1}$ على الشكل $f(x) = \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x}$

ومنه $g'(1) = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

تطبيق 25 المستقيم المقارب للمائل ووضعيته بالنسبة لمنحنى

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالصيغة $f(x) = x + 3 - \frac{\ln x}{x}$

(1) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f)

(2) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

الحل

(1) حتى يكون (Δ) مستقيما مقاربا مائلا لـ (C_f) يجب أن يكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+3)] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x} = 0$$

إذن $(\Delta): y = x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f)

(2) لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة $d(x)$

حيث $d(x) = f(x) - (x+3) = \frac{-\ln(x)}{x}$

$$d(x) = f(x) - (x+3) = \frac{-\ln(x)}{x}$$

$d(x) = 0$ يكافئ $\ln(x) = 0$ يكافئ $x = 1$

إذا كان $x > 1$ فإن $d(x) < 0$ ومنه (Δ) يقع فوق (C_f)

وإذا كان $x < 1$ فإن $d(x) > 0$ ومنه (Δ) يقع تحت (C_f)

(Δ) يقطع (C_f) في النقطة $A(1, 4)$

دراسة قابلية الاشتقاق

تطبيق 24

(1) f دالة معرفة على $]-1, +\infty[$ بـ $f(x) = (x+1)^2 [1 - \ln(x+1)]$

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)^2 [1 - \ln(x+1)] \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق f عند $x = -1$

(2) g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

إذا كان $x \neq 1$ و $g(1) = 0$ ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند 1

الحل

(1) حتى تقبل الدالة f الاشتقاق عند $x = -1$ يجب أن يكون $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \ell$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) [1 - \ln(x+1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) - (x+1) \ln(x+1)] = 0 = \ell$$

إذن f قابلة للاشتقاق عند العدد -1

(2) حتى تقبل الدالة g الاشتقاق عند 1 يجب أن يكون $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \ell$

هما $x \mapsto f(x)$ و $x \mapsto x$ ومن أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا،

$$f'(x) = 1 - \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(x+1)} \times x \right] = 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}$$

 الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ ،
 ومن أجل كل x من $]1, +\infty[$ لدينا $u(x) > 0$
 ومنه الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$
 ولدينا
$$f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

٢٦ حل معادلات ومترجمات

في كل حالة من الحالات التالية حل المترجمات والمعادلات ذات المجهول x
 (أ) $2^x \leq 100$ ، x عدد طبيعي . (ب) $4^x = 10000$ ، x عدد حقيقي
 (ج) $(0,25)^x = 1$ ، x عدد حقيقي . (د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 0,2$ ، x عدد حقيقي

الحل ✓

(أ) $2^x \leq 100$ يكافئ $\ln(2^x) \leq \ln(100)$
 $x \ln(2) \leq \ln(100)$ يكافئ
 $x \leq \frac{\ln(100)}{\ln(2)}$ يكافئ
 ومنه مجموعة حلول المترجمة (أ) هي $\{0, 1, \dots, 66\}$
 (ب) $4^x = 10000$ يكافئ $x \ln(4) = \ln(10000)$ يكافئ $x = \frac{\ln(10000)}{\ln(4)}$
 (ج) $(0,25)^x = 1$ يكافئ $x \ln(0,25) = 0$ يكافئ $x = 0$
 (د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 0,2$ يكافئ $x \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln(0,2)$
 $x \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ يكافئ

ومنه مجموعة حلول المترجمة (د) هي $\left[\frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}, +\infty \right[$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x-1} = 1 \times (\infty) = \infty$$

 ومنه الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 1.

٢٥ مشتق الدالة المركبة

تطبيق

في كل حالة من الحالات التالية تحقق أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من I ثم أحسب $f'(x)$
 (أ) $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \ln(2 + x^2)$
 (ب) $I =]1, +\infty[$ ، $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
 (ج) $I =]0, +\infty[$ ، $f(x) = x - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
 (د) $I =]1, +\infty[$ ، $f(x) = \ln(\ln x)$

الحل ✓

(أ) الدالة $x \mapsto 2 + x^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}
 ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $u(x) > 0$ ومنه الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}
 ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = \frac{2x}{2+x^2}$
 (ب) الدالة $u: x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ و $u(x) > 0$ يكون x من $]1, +\infty[$
 إذن الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$
 ولدينا $f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$
 (ج) الدالة $u: x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$
 ومن أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $u(x) > 0$ ومنه الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$
 ولدينا $(\ln \circ u)'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$
 - الدالة $x \mapsto -x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$
 لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وهما $x \mapsto -x$ و $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
 إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$

الدالة اللوغاريتمية العكسية

لأن كل الخواص المتعلقة بالدالة \ln تبقى صحيحة بالنسبة إلى الدالة g .

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

حالة $a > 1$

- إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ ومنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+
تغيرات g		$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

حالة $0 < a < 1$

- الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$

بما أن $\ln a < 0$ فإنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		-
تغيرات g		$-\infty$

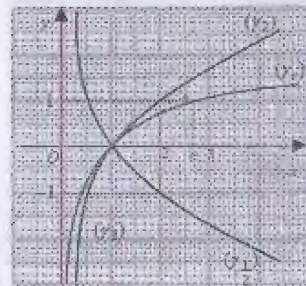
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

(γ_0) له مستقيم مقارب

معادلته $x = 0$

(γ_0) يقطع (x, x) في النقطة $(1, 0)$ ويمر أيضا من النقطة $(e, 1)$.



(γ_1) يمر من النقطة $(1, 0)$ والنقطة $(2, -1)$.

وله مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

(γ_2) يمر من النقطتين $(1, 0)$ و $(2, 1)$.

(γ_1) هو نظير (γ_2) بالنسبة إلى محور الفواصل

وبصفة عامة (γ_1) نظير (γ_n) بالنسبة إلى محور الفواصل

رسم التمثيل البياني لدالة

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \quad \text{بالعبارة }]-1, 1[$$

(1) بين أن الدالة f فردية.

تطبيق 27

حصر أعداد بواسطة قوة العدد 10

إذا علمت أن $\log a = 4.42$ و $\log b = 3.68$ أعط حصرًا للعديدين a و b بواسطة قوى العدد 10 ثم حصرًا للأعداد a^3 ، a^2 ، $\frac{a}{b}$.

الحل

- من المتباينة $\log a \geq 4$ ينتج $a \geq 10^4$

- من المتباينة $\log b \geq 3$ ينتج $b \geq 10^3$

- لدينا $\log \frac{a}{b} = 0.74$ أي $\log a - \log b = 0.74$

وبما أن $\log \frac{a}{b} \geq 0$ فإن $\frac{a}{b} \geq 10^0$

- لدينا $\log a^2 = 2 \log a = 8.84$ إذن $\log a^2 \geq 8$ وعليه $a^2 \geq 10^8$

- لدينا $\log(ab) = \log a + \log b = 8.10$ إذن $\log(ab) \geq 8$

وعليه يكون $a \geq 10^8$

- لدينا $\log a^3 = 3 \log a = 13.26$ إذن $\log a^3 \geq 13$ وعليه يكون $a^3 \geq 10^{13}$

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a

تطبيق 28

ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما و يختلف عن 1 ولتكن g دالة معرفة من

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

(1) احسب $g(a)$ ثم بين أن $g(b \times c) = g(b) + g(c)$

(2) عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها حسب قيم a .

(3) ليكن (γ_0) المنحنى البياني للدالة g في مستوى منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ارسم (γ_0) ، (γ_1) ، (γ_2) في نفس العلم

الحل

$$g(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$$

$$g(b \times c) = \frac{\ln(b \times c)}{\ln a} = \frac{\ln b + \ln c}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} + \frac{\ln c}{\ln a} = g(b) + g(c)$$

- (2) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$
 (3) ادرس تغيرات الدالة f على $[0, 1]$ ثم ارسم منحنياها.

✓ الحل

(1) f دالة فردية إذا وفقط إذا كان من أجل كل x من $]-1, 1[$

فإن $-x$ من $]-1, 1[$ و $f(-x) = -f(x)$
 إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن $-x \in]-1, 1[$

و $f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ ومنه f فردية.

(2) الدالة $u: x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$ قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$ ولدينا $u(x) > 0$

ومنه الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$

(3) دراسة تغيرات f على $[0, 1]$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ و $f(0) = 0$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$ ولدينا $f'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$

من أجل كل x من $[0, 1]$ يكون $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0, 1]$

بما أن الدالة f فردية نرسم بيانها على المجال

$[0, 1]$ ونتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى

البدا $O(0, 0)$

$x=1$ معادلة مستقيم مقارب يوازي (y)

x	0	1
إشارة $f'(x)$		+
تغيرات f		$+\infty$



تطبيق 30 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

(1) f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \ln(x) - x$

(أ) ادرس تغيرات الدالة f

(ب) احسب $f(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$.

(2) (أ) باستعمال السؤال (1) ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$

بالعلاقة $g(x) = (\ln x)^2 - 2x$

(ب) ارسم (γ) بيان الدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

✓ الحل

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ عدم التعيين

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 \right) = -\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x=1$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	-
تغيرات f		0	$-\infty$

- إذا كان $x > 1$ فإن

$f'(x) < 0$ ومنه f

متناقصة تماما على

$]1, +\infty[$

- إذا كان $x > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]0, 1[$

(ب) من جدول تغيرات f نستنتج أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $f(x) \leq 0$

(2) (أ) دراسة تغيرات g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{2}{x} \ln x - 2$

ومنه $g'(x) = \frac{2}{x} (\ln(x) - x)$ أي $g'(x) = \frac{2}{x} \times f(x)$

$g'(x) = 0$ يكافئ $f(x) = 0$ يكافئ $x=1$

من أجل كل x من $]1, +\infty[$ يكون $g'(x) < 0$

إذن $g'(x)$ سالب و يعدم عند $x=1$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ عدم التعيين

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\sqrt{x})^2 - 2(\sqrt{x})^2)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4(\ln(\sqrt{x}))^2 - 2(\sqrt{x})^2$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		-	-
تغيرات g		$+\infty$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

اتجاه تغير f :

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)} \text{ ولدينا } f'(x) = 0 \text{ يكافئ } x^2 - x - 2 = 0 \text{ يكافئ } (x-2) \text{ او } (x+1)$$

$$x = -1 \text{ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى } I \text{ و بالتالي } f'(2) = 0$$

$$\text{إشارة } f'(x) \text{ على } I \text{ هي نفس إشارة } (x^2 - x - 2)$$

- إذا كان $x \in]1, 2[$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالى f متناقصة تماما على $[1, 2]$

- إذا كان $x \in]2, +\infty[$ فإن $f'(x) > 0$ وبالتالى f متزايدة تماما على $[2, +\infty[$

x	1	2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	$+\infty$	$f(2)$	$+\infty$

$$f(2) = 2 \ln(2)$$

$$f(2) \approx 1,38$$

(1) معادلة $y = x - 2$

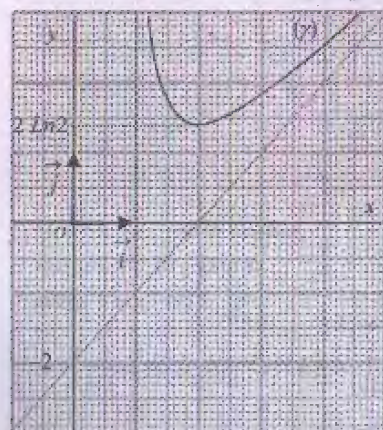
مستقيم مقارب لـ (γ) إذا و

فقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - x + 2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$



(ب) لدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة المقدار $f(x) - (x-2)$ على I

$$f(x) - (x-2) = 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

من أجل كل $x \in I$ يكون $x > 1$

بالقلب نجد $\frac{x}{x-1} > 1$ و منه ينتج

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > \ln(1)$$

$$\text{أي } \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

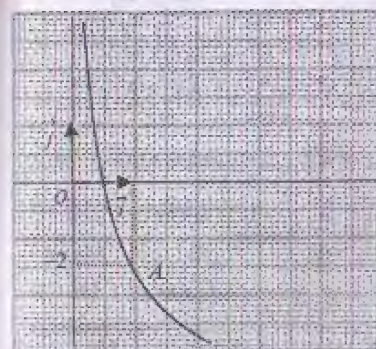
$$\text{إذن } f(x) - (x-2) > 0$$

و هذا يعني أن المنحنى (γ) يقع فوق المستقيم (Δ)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{x})^2 \left[\frac{2 \left(\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right) \right)^2}{(\sqrt{x})^2} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{x})^2 \left[2 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 - 1 \right] = -\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{x})^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) = 0$$



(ب) للمستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2x) = +\infty$$

إذن المنحنى (C_f) ليس له مستقيم مقارب مائل.

- بما أن $g'(x)$ يتغير عند $x = 1$

و لا يغير إشارته في جوار 1 فإن النقطة

$A(1, -2)$ نقطة انعطاف لـ (C_g)

و المماس عندها يخترق المنحنى (C_g)

تطبيق 1 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

تطبيق 1

f دالة معرفة على المجال $I =]1, +\infty[$ بالعلاقة التالية :

$$f(x) = x - 2 + 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f

(2)

(أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل

للمنحنى (γ) الممثل للدالة f

(ب) ادرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم بالتدقيق (γ) و (Δ) في نفس العلم.

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1} = +\infty$$

تطبيق 31

دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

f دالة معرفة على المجال $]1, +\infty[$ ، بالعلاقة التالية :

$$f(x) = x - 2 + 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) بين أن المستقيم $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (γ) الممثل للدالة f .

(ب) ادرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم (γ) و (Δ) في نفس العلم.

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$$

اتجاه تغير f

الدالة f قابلة للاشتقاق على I ولدينا $f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)}$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } x^2 - x - 2 = 0 \text{ يكافئ } (x-2) \text{ او } (x+1)$$

$x = -1$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى I وبالتالي $f'(2) = 0$

إشارة $f'(x)$ على I هي نفس إشارة $(x^2 - x - 2)$

- إذا كان $x \in]1, 2[$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $]1, 2[$

- إذا كان $x \in]2, +\infty[$ فإن $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $]2, +\infty[$.

$$f(2) = 2 \ln(2)$$

$$f(2) \approx 1,38$$

x	1	2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	$+\infty$	$f(2)$	$+\infty$

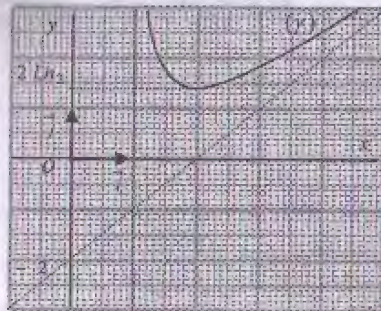
(2) $y = x - 2$ معادلة مستقيم

مقارب لـ (γ) إذا و فقط إذا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - x + 2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

(ب) لدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة القدار $f(x) - (x-2)$ على I .



$$f(x) - (x-2) = 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

من أجل كل $x \in I$ يكون $x-1 > 0$

بالقلب نجد $\frac{x}{x-1} > 1$ ومنه ينتج

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 \text{ أي } \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > \ln(1)$$

$$\text{إذن } f(x) - (x-2) > 0$$

وهذا يعني أن المنحنى (γ) يقع فوق المستقيم (Δ)

تطبيق 32

دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ $f(0) = 1$ ومن أجل $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

(ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج أن من أجل كل x من $[0, +\infty[$ يكون :

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(ج) بطريقة مماثلة بين أنه إذا كان $x \geq 0$ فإن $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

(د) تحقق أن من أجل كل $x > 0$ يكون $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{3}$

(هـ) استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند الصفر وأن $f'(0) = \frac{1}{2}$

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ عدم التعيين}$$

بوضع $\kappa(x) = \ln(1+x)$ نجد $\kappa(0) = 0$ ومنه $\frac{\kappa(x) - \kappa(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$

الدالة κ قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند الصفر

الدالة اللوغاريتمية . جبرية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي $f'(0) = -\frac{1}{2}$ لأن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر و $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

تطبيق 33 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

- 1) دالة معرفة على المجال $]3, +\infty[$ بـ $f(x) = (x+1) \ln(x-3)$ و (y) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول هي 1cm)
- (1) تحقق أنه من أجل $x > 3$ يكون $f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln(x-3)$
- (2) أحسب $f''(x)$ حيث f' المشتق الثاني للدالة f ثم استنتج اتجاه تغير f' .
- (3) عين إشارة $f'(x)$ على المجال $]3, +\infty[$.
- (4) ادرس نهاية f عند أطراف المجال $]3, +\infty[$ ثم حدد المستقيمات المقاربة لـ (y) .
- (ب) شكل جدول تغيرات الدالة f
- (5) عين نقط تقاطع (y) مع (xx') ثم رسم (y) .

الحل ✓

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]3, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln(x-3)$

(2) الدالة f'' قابلة للاشتقاق على $]3, +\infty[$ ولدينا $f''(x) = \frac{x-7}{(x-3)^2}$

$f''(x) = 0$ تكافئ $x = 7$

إذا كان $x > 7$ فإن $f''(x) > 0$ بالتالي f' متزايدة تماماً على $]7, +\infty[$.
إذا كان $x < 7$ فإن $f''(x) < 0$ وبالتالي f' متناقصة تماماً على $]3, 7[$.

(3) بما أن $f''(x)$ موجبة على $]7, +\infty[$ و سالبة على $]3, 7[$ و $f''(7) = 0$ فإن الدالة f' لها قيمة حدية صغرى هي $f'(7)$ على المجال $]3, +\infty[$.

بالتالي من أجل كل $x \in]3, +\infty[$ يكون $f'(x) \geq f'(7)$

وبما أن $f'(7) = \frac{8}{2} + 2 \ln(2) > 0$ أي $f'(7) > 0$ فإن $f'(x) > 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-3) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln(x-3) = +\infty$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ لكن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ وعليه $f'(0) = 1$

وبالتالي $f'(x) = \frac{1}{x+1} - (1-x+x^2) = \frac{-x^3}{x+1}$ ولدينا $f'(x) \leq 0$ فإن $x \geq 0$ بما أن $x \geq 0$ فإن $f'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$.

(2) $f'(x) = \frac{1}{x+1} - (1-x+x^2) = \frac{-x^3}{x+1}$ ولدينا $f'(x) \leq 0$ فإن $x \geq 0$ بما أن $x \geq 0$ فإن $f'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$.

بما أن $x \geq 0$ فإن $f'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$.

(ب) بما أن $f'(0) = 0$ و f' متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$ فإنه من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ يكون $f'(x) \leq 0$

وهذا يعني أن $f(x) \leq f(0) = 0$ أي $f(x) \leq 0$ لكل $x \in [0, +\infty[$

(ج) نضع $d(x) = f(x) - \left[x - \frac{x^2}{2}\right]$

ندرس اتجاه تغير d على $I = [0, +\infty[$

الدالة d قابلة للاشتقاق على I

وأنه من أجل كل x من I لدينا $d'(x) = \frac{x^2}{1+x}$

بما أن $x \geq 0$ فإن $\frac{x^2}{1+x} \geq 0$

وهذا يعني أن $d'(x) \geq 0$ إذن فإن الدالة d متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$.

بما أن $d(0) = 0$ و d متزايدة تماماً على I

فإنه من أجل كل $x \geq 0$ لدينا $d(x) \geq 0$

أي $f(x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ وهذا يعني أن $f(x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

(د) من السؤالين (ب) و (ج) نجد $x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

بإضافة $-x$ نجد $-\frac{x^2}{2} \leq f(x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

وبالقسمة على x^2 نجد $-\frac{1}{2} \leq \frac{f(x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

هـ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} \cdot x$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2} \leq \frac{f(x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

فإنه حسب نظرية الحصر نستنتج $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

- (3) باستعمال القوس (1) درس تغيرات الدالة f . ثم ارسم (γ) المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة 5 cm).
- (III) (1) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0, 1]$.
- (2) بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{x}$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $[1, +\infty[$.
- (3) (1) بين أن $\alpha\beta = 1$.
- (ب) عين حصر α β بتقريب 0,001 ثم استنتج حصر α .

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} [x^4 - 1 - 4x(x \ln x)] = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[1 - \frac{1}{x^4} - 4 \frac{\ln x}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[1 - \frac{1}{x^4} - 4 \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

اتجاه تغير g

$$g'(x) = \frac{2(x^2-1)^2}{x^3} \text{ ولدينا } [0, +\infty[\text{ الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على }]0, +\infty[$$

$$g'(x) = 0 \text{ يكافئ } x=1 \text{ أو } x=-1$$

$$\text{بما أن } x > 0 \text{ فإن للمعادلة } g'(x) = 0 \text{ حلا وحيدا } x=1$$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	+
تغيرات g			$+\infty$

من أجل كل $x > 0$

و $x \neq 1$ لدينا $g'(x) > 0$

وبالتالي الدالة g متزايدة

تماما على $[0, +\infty[$

$$g(1) = 0 \quad (2)$$

$$\text{إذا كان } x > 1 \text{ فإن } g(x) > 0 \text{ وإذا كان } 0 < x < 1 \text{ فإن } g(x) < 0$$

$$(1) \text{ (II) من أجل كل } x > 0 \text{ لدينا:}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{4} + \frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^3} - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (-\ln x)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-3) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{x} = 1$$

إذن المنحنى (γ) ليس له مستقيم مقارب في جوار $(+\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-3) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+1) = 4$$

إذن (γ) له مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=3$

x	3	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+
تغيرات f		$+\infty$

(ب) بما أن $f'(x) > 0$ موجبة تماما على $[3, +\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $[3, +\infty[$

(5) فاصلة نقطة التقاطع المنحني (γ)

مع (x, x') هي حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = 0 \text{ يكافئ } (x+1) = 0$$

$$\text{أو } \ln(x-3) = 0 \text{ و } x > 3$$

$$\text{يكافئ } (x-1) = 0 \text{ أو } (x-3) = 1 \text{ و } x > 3$$

$$\text{يكافئ } (x-1) = 0 \text{ أو } (x-4) = 0 \text{ و } x > 3$$

$$\text{إذن } f(x) = 0 \text{ يكافئ } (x=4)$$

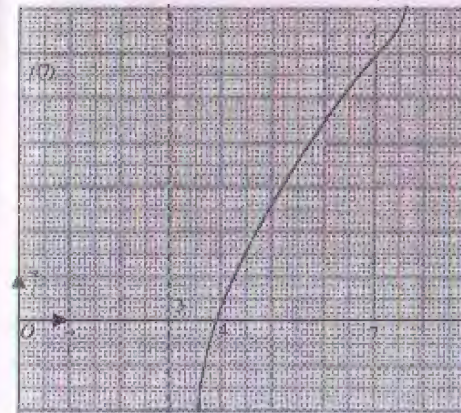
وعليه (γ) يقطع (x, x') في النقطة $(4, 0)$

بما أن $f''(x)$ يعدم عند 7 مغيرا إشارته

في جوار 7 فإن النقطة $A(7, f(7))$

نقطة انعطاف للمنحنى (γ)

$$f(7) = 8 \ln(4) = 16 \ln(2)$$



تطبيق 34 دراسة دالة و حل المعادلات

$$(1) \text{ نعتبر } g \text{ دالة معرفة على } [0, +\infty[\text{ بالمعادلة } g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$$

(2) ادرس تغيرات الدالة g .

(3) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $[0, +\infty[$

$$(4) \text{ نعتبر دالة معرفة على } [0, +\infty[\text{ بالمعادلة } f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

(1) بين أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

(2) عين نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ و عند الصفر

$$= \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (\ln x)^2 = f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty \quad \text{حالة عدم التحديد} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty - \infty \quad \text{حالة عدم التحديد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} - (x \ln x)^2 \right] = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} g(x) \quad \text{ولدينا }]0, +\infty[\quad (3)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ } x=1$$

- بما أن من أجل كل $x > 1$ يكون

$$f'(x) > 0 \quad \text{فإن } g(x) > 0$$

- وإذا كان $x > 0$ فإن

$$f'(x) < 0 \quad \text{و منه } g(x) < 0$$

إذن f متزايدة تماما على

$$[1, +\infty[\quad \text{ومتناقصة تمام على }]0, 1]$$

$$h(x) = f(x) - x \quad \text{نضع (III)}$$

$$\text{الدالة } h \text{ قابلة للاشتقاق على }]0, 1[$$

$$\text{ولدينا } h'(x) = f'(x) - 1$$

$$- \text{ بما أن } f'(x) < 0 \text{ على المجال }]0, 1[$$

$$\text{فإن } h'(x) < 0 \text{ على }]0, 1[\quad \text{و } h([0, 1]) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right]$$

$$- \text{ بما أن } 0 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right] \text{ فإن للمعادلة } h(x) = 0 \text{ حلا وحيدا } \alpha \in]0, 1[$$

$$\text{بما أن } h(\alpha) = 0 \quad \text{فإن } f(\alpha) = \alpha$$

$$(2) \quad \text{نضع } k(x) = f(x) - \frac{1}{x}$$

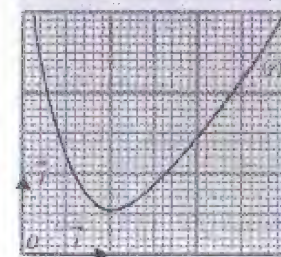
$$\text{الدالة } k \text{ قابلة للاشتقاق على }]1, +\infty[\quad \text{ولدينا } k'(x) = f'(x) + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{بما أن } f'(x) > 0 \text{ على المجال }]1, +\infty[\quad \text{فإن } k'(x) > 0$$

$$\text{بما أن } k([1, +\infty[) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right] \quad \text{و } 0 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right]$$

$$\text{فإن للمعادلة } k(x) = 0 \text{ حلا وحيدا } \beta \in]1, +\infty[\quad \text{أي } f(\beta) = \frac{1}{\beta}$$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	+
تغيرات f	$+\infty$	$f(1)$	$+\infty$



$$(1) \quad \text{لدينا } f(\alpha) = \alpha \quad \text{و } f(\beta) = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{بما أن } \beta > 1 \quad \text{فإن } \frac{1}{\beta} < 1$$

$$\text{لدينا } f(\beta) = f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{إذن } f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} \quad \text{و } f(\alpha) = \alpha$$

وبما أن للمعادلة $f(x) = x$ حلا وحيدا

$$\text{فإن } \frac{1}{\beta} = \alpha \quad \text{أي } \alpha\beta = 1$$

(ب) نستعمل طريقة المسح لتحديد المجال $[a, b]$ الذي ينتمي إليه β في المرحلة الأولى.

ثم نستعمل طريقة ديكتومي لتحديد حصر أدق.

من الجدول الجاور نستنتج أن $\beta \in]1, 2[$

$$k\left(\frac{3}{2}\right) = -0,15080 < 0$$

$$k(1,75) = -0,027243 < 0$$

$$k(1,875) = 0,10916 > 0 \quad \text{إذن } \beta \in]1,750, 1,875[$$

$$- \text{ بما أن } \beta \in]1,750, 1,875[\quad \text{والدالة } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ متناقصة على المجال }]1,750, 1,875[$$

$$\text{فإن } \frac{1}{1,875} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{1,750} \quad \text{أي } \frac{1}{\beta} \in \left[\frac{1}{1,875}, \frac{1}{1,750} \right]$$

$$\text{ومنه } \alpha \in]0,533, 0,571[$$

تطبيق 35 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

$$f \text{ دالة معرفة على }]0, 1[\text{ بالعبارة } f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$$

(أ) عتحنها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) f يكون أنه من أجل كل $x \in]0, 1[$ فإن

$$\frac{1}{2} [f(x) + f(1-x)] = -\frac{1}{4}$$

(ب) استنتج أن النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (γ) .

$$(2) \text{ ادرس تغيرات الدالة } f \text{ على المجالين } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ و }]1, +\infty[$$

(3) (أ) بين أن المستقيم $y = -\frac{x}{2}$ ذا المعادلة $y = -\frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (γ)
ثم حدد الوضع النسبي للمنحنى (γ) بالنسبة إلى (Δ)
(ب) ارسم (γ) و (Δ) في نفس العلم.

✓ الحل

(1) من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [f(x) + f(1-x)] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \left(\frac{1-x}{2} \right) + \ln \left| \frac{-x}{1-x} \right| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \times \frac{x}{x-1} \right| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} + \ln |1| \right] = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

(ب) لدينا $\frac{1}{2} [f(x) + f(1-x)] = -\frac{1}{4}$... (*)

$A(a, b)$ مركز تناظر لـ (γ) إذا وفقط إذا كان $f(2a-x) = 2b - f(x)$

$$\frac{1}{2} [f(x) + f(2a-x)] = b$$

من العلاقة (*) نستنتج أن $a = \frac{1}{2}$ و $b = -\frac{1}{4}$ ومنه النقطة $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ مركز تناظر لـ (γ)

(2) دراسة تغيرات الدالة f على $[\frac{1}{2}, 1]$ و $[1, +\infty]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $[\frac{1}{2}, 1]$ و $[1, +\infty]$

$$f'(x) = \frac{-(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}$$

x	-1	0	1	2
$-(x+1)(x-2)$	-	+	+	-
$2x(x-1)$	+	+	-	+
$-(x-1)(x+2)$	-	+	-	+
$2x(x-1)$	+	+	-	+

إذا كان $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ أو $x \in [2, +\infty]$ فإن $f'(x) < 0$

إذا كان $x \in [1, 2]$ فإن $f'(x) > 0$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left| \frac{x-1}{x} \right| = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left| \frac{x-1}{x} \right| = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{2} \right) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x-1}{x} \right| = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

جدول تغيرات f على $[\frac{1}{2}, 1[\cup]1, +\infty[$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	-	+	-
تغيرات f	$-\frac{1}{4}$	$-\infty$	$-1 - \ln(2)$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right) \right] = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \\ &= \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

ومنه $y = -\frac{x}{2}$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$

- للدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة المقدار $f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right)$ على $[\frac{1}{2}, 1[\cup]1, +\infty[$

$$f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right) = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$$

لدينا $f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right) = \ln \left(\frac{1-x}{x} \right)$ فإن $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ إذا كان $x < 1$

بما أن $1-x < 1$ فإن $\frac{1-x}{x} < 1$ ومنه $\ln \left(\frac{1-x}{x} \right) < 0$

أي المنحنى (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) في المجال $[\frac{1}{2}, 1[$

إذا كان $x \in]1, +\infty[$ فإن $x > 1$ فإن $\frac{x-1}{x} > 0$

بما أن $x-1 > 1$ فإن $\frac{x-1}{x} > 1$

أي $\ln \left(\frac{x-1}{x} \right) < 0$

- (3) (أ) بين أنه من أجل $x > 0$ يكون $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج تغيرات f .
(ب) بين أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ ثم ارسم (f') و (f) .

✓ الحل

- (1) (أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[1, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$
من أجل كل $x > 1$ لدينا $g'(x) < 0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $[1, +\infty[$
وبالتالي $g([1, +\infty[) =]-\infty, 1 - \ln 2]$
بما أن $g'(0) > 0$ و $0 \in]-\infty, 1 - \ln 2]$
فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in [1, +\infty[$
- تعيين حصر لـ α

باستعمال طريقة المسح نجد أن $\alpha \in]1, 2]$ نحسب $g\left(\frac{1+2}{2}\right)$ أي $g(1,5)$
 $g(1,5) = 0,206 > 0$ و منه $\alpha \in]1,5, 2]$

- (2) تعيين إشارة $g(x)$
بما أن g متناقصة تماما على المجال $[1, +\infty[$ و $g(\alpha) = 0$ و $g(1) > 0$ فإن :
إذا كان $x \in]\alpha, +\infty[$ يكون $g(x) < 0$
وإذا كان $x \in [1, \alpha]$ يكون $g(x) > 0$

x	0	1	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	+	+	0	-

بما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0, 1]$ و $g(0) = 0$ و $g(1) > 0$

فإنه من أجل كل $x \in]0, 1]$ يكون $g(x) > 0$

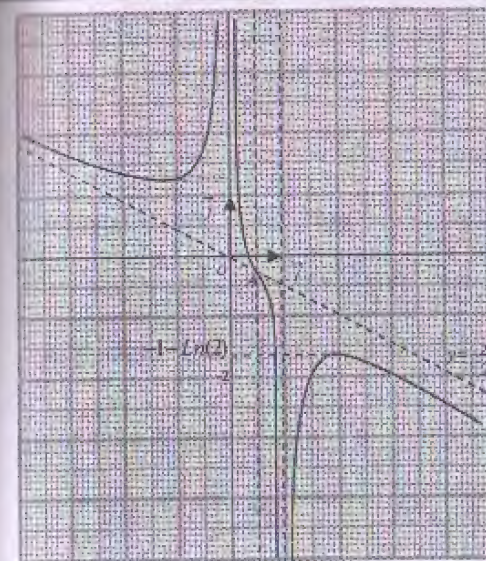
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \end{cases} \quad x > 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 = \ell \quad (1)$$

حيث $X = x^2$

(ب) بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ تساوي عدد حقيقي فإن f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

- معادلة التماس (f') عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$ هي $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$



ومنه (f') يقع تحت المستقيم Δ في المجال $[1, +\infty[$
صورة Δ بالتناظر المركزي الذي مركزه A هو المستقيم $x = \frac{1}{2}$
صورة المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{1}{2}$ هو نفسه.

صورة النقطة $(2, -1 - \ln(2))$ هي النقطة $(-1, \frac{1}{2} + \ln(2))$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$
 $= -(-\infty) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

طريقة دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

تطبيق 36

- (1) g دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$
(1) بين أنه على المجال $[1, +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ثم حدد حصرا له بتقريب $0,1$.
(2) عين إشارة $g(x)$ على المجال $[0, +\infty[$

- (II) f دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \end{cases} \quad x > 0$
(1) ما هي نهاية $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ ؟

(ب) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ ثم أوجد معادلة التماس (f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$ للمنحنى البياني (f) التمثيل f

- (2) بين أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$

و بالحساب نجد $y = x$

(2) من أجل كل $x > 0$ لدينا $f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \times \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

- يمان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(3) (ا) من أجل كل $x > 0$ لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$

$f'(x) = 0$ يكافئ $g(x) = 0$ يكافئ $x = \alpha$

x	0	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	0	+	-
تغيرات f	0	$f(\alpha)$	0

إذا كان $x \in]0, \alpha[$

فإن $f'(x) > 0$

وبالتالي f متزايدة تماما

على $[0, \alpha]$

و إذا كان $x \in]\alpha, +\infty[$

فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $[\alpha, +\infty[$

(ب) يمان $g(\alpha) = 0$ فإن $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} - \ln(\alpha^2+1) = 0$

أي $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} = \ln(\alpha^2+1)$

$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha} = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

نضع $L(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

الدالة L قابلة للاشتقاق على $]1,5, 2[$

ولدينا $L'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

ومن أجل كل x من $]1,5, 2[$

لدينا $L'(x) < 0$

أي L متناقصة تماما على $]1,5, 2[$

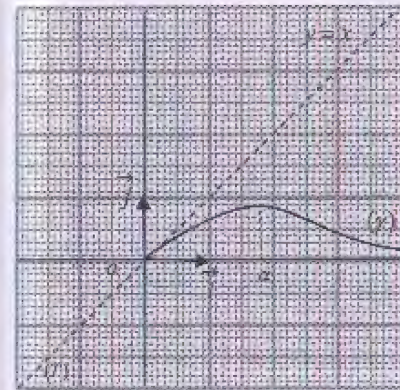
وعليه $L([1,5, 2]) =]0,75, 0,923[$

و يمان $L(\alpha) = f(\alpha)$

فإن $f(\alpha) \in]0,75, 0,923[$

للتقييم ذو المعادلة $y = 0$

مقارب لـ (y) في جوار $(+\infty)$



عائلة المنحنيات

تطبيق 17

n عدد طبيعي غير معلوم و f_n دالة معرفة على $]-1, +\infty[$ بالعلاقة $f_n(x) = x^n \ln(x+1)$ و (y_n) المنحني الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول 2 cm)

(1) لتكن h_n دالة معرفة على $]-1, +\infty[$ بـ $h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$

(ا) ادرس اتجاه تغير الدالة h_n

(ب) احسب $h_n(0)$ ثم استنتج إشارة $h_n(x)$ على $]-1, +\infty[$

(2) (ا) تحقق أنه من أجل كل $x \in]-1, +\infty[$ لدينا

$f_n'(x) = x^{n-1} \times h_n'(x)$ مع $n \geq 2$

(ب) نضع $n=1$ تحقق أن $f_1'(x) = h_1(x)$ ثم بين أن $f_1'(x)$ و $h_1(x)$

لهما نفس الإشارة على المجال $]-1, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_1

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f_2

(3) (ا) بين أن جميع المنحنيات (y_n) تمر من نقطة ثانية يطلب تعيينها

(ب) ادرس الوضع النسبي لـ (y_1) و (y_2) ثم ارسم (y_1) و (y_2) في نفس العلم

الحل

(1) (ا) دراسة اتجاه تغير h_n

الدالة h_n قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$

ولدينا $h_n'(x) = \frac{nx + (n+1)}{(x+1)^2}$

فالمعادلة $h_n'(x) = 0$ لها حل وحيد هو $x = -\left(\frac{n+1}{n}\right)$

يمان $-\left(\frac{n+1}{n}\right) < -1$ فإن المعادلة $h_n'(x) = 0$ ليس لها حلول في $]-1, +\infty[$

و إشارة $h_n'(x)$ هي نفس إشارة $nx + (n+1)$

x	$-\left(\frac{n+1}{n}\right)$	-1	$+\infty$
$nx + (n+1)$	-	0	+

من الجدول الجاور نستنتج أنه من أجل كل $x \in]-1, +\infty[$ يكون $h_n'(x) > 0$ إذن الدالة h_n متزايدة تماما على $]-1, +\infty[$

(ب) يمان $h_n(0) = 0$ فإنه إذا كان $x \in]-1, 0[$ يكون $h_n'(x) < 0$

و إذا كان $x \in]0, +\infty[$ يكون $h_n'(x) > 0$

(2) الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ ولدينا $f'_n(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$

ب) من أجل $n=1$ نجد $f'_1(x) = h_1(x)$ وبالتالي إشارة $f'_1(x)$ هي نفس إشارة $h_1(x)$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \ln(x+1) = +\infty$

x	-1	0	$+\infty$
إشارة $f'_1(x)$		-	+
تغيرات f_1		$+\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$$

ج) من أجل $n=2$

$$f'_2(x) = x h_2(x)$$

$$f_2(0) = 0$$

إذا كان $x > 0$ فإن $f'_2(x) > 0$

وإذا كان $x < 0$ فإن $f'_2(x) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 \ln(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x+1) = +\infty$$

(3) (1) $M_0(x_0, y_0)$ تنتمي إلى

(y_{n_1}) و (y_{n_2}) مع $n_1 \neq n_2$

هذا معناه أن

$$y_0 = x_0^{n_1} \ln(x_0+1)$$

$$y_0 = x_0^{n_2} \ln(x_0+1)$$

ومنه ينتج $x_0^{n_1} \ln(x_0+1) = x_0^{n_2} \ln(x_0+1)$

وبالتبسيط نجد $(\ln(x_0+1))(x_0^{n_1} - x_0^{n_2}) = 0$

أي $(\ln(x_0+1)) = 0$ لأن $(x_0^{n_1} - x_0^{n_2}) \neq 0$

$\ln(x_0+1) = 0$ يكافئ $x_0 = 0$ وعليه $y_0 = 0$

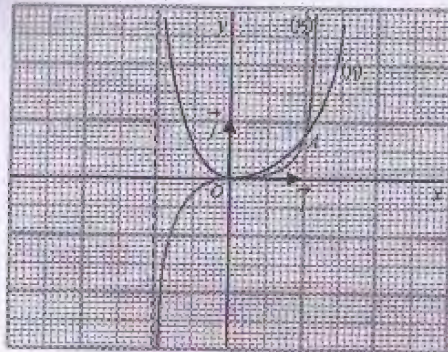
إذن النقطة $O(0,0)$ تنتمي إلى جميع المنحنيات (γ_n) .

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2)

لدراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ندرس إشارة الفرق $f_2(x) - f_1(x)$ على $]-1, +\infty[$

$$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)\ln(1+x)$$

x	-1	0	1	$+\infty$
$x(x-1)$		+	-	+
$\ln(1+x)$		-	+	+
$f_2(x) - f_1(x)$		-	-	+



- المنحنى (γ_2) يقطع المنحنى (γ_1)

في النقطة $O(0,0)$

و يقطعه أيضا في النقطة

$$A(1, \ln(2))$$

- إذا كان $x > 1$

فإن (γ_2) يقع فوق (γ_1)

- إذا كان $x \in]-1, 1[$

فإن (γ_2) يقع تحت (γ_1)

تطبيق 38 الدوال اللوغاريتمية والمتتاليات

(1) (U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n

$$U_{n+1} = e \sqrt{U_n}$$

$V_n = \ln(U_n) - 2$ بـ n من أجل كل n

(1) بين أن المتتالية (V_n) هندسية معينة حدها الأول V_0 وأساسها r

(2) استنتج عبارة V_n و $\ln(U_n)$ بدلالة n

(3) ما هي نهاية (V_n) ؟

ب) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو e^2 .

الحل

(1) (V_n) هندسية معناه أنه يوجد r من \mathbb{R}^*

بحيث من أجل كل n لدينا $V_{n+1} = V_n \times r$

$$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2 = \ln(e \sqrt{U_n}) - 2 = \ln(e) + \ln(\sqrt{U_n}) - 2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \ln(U_n) - 2 = \frac{1}{2} (\ln(U_n) - 2) = \frac{1}{2} V_n$$

إذن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $V_0 = \ln(U_0) - 2 = 1$

$$V_n = V_0 \times r^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (2)$$

$$\ln(U_n) = V_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$$

ومنه نستنتج $\langle 0 \rangle \ln(U_n) + \ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)$ أي $\ln\left(U_n \times \frac{n}{(n+1)^2}\right) < 0$
وبالقسمة على 2 نجد $\frac{1}{2} \left[\ln(U_n) + \ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) \right] < 0$ أي $\ln(U_{n+1}) < 0$
بما أن $\ln(U_{n+1}) < 0$ فإن $U_{n+1} > 0$ و $2 \geq 1$
فإن $0 < U_{n+1} \leq 2$ إذن P_{n+1} صحيحة
وبالتالي P_n صحيحة من أجل كل $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ln(V_{n+1}) &= \ln((n+1)U_{n+1}) \text{ ومنه } V_{n+1} = (n+1)U_{n+1} \\ \ln(V_{n+1}) &= \ln(n+1) + \ln(U_{n+1}) = \ln(n+1) + \frac{1}{2} \left[\ln(U_n) + \ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) \right] \\ &= \ln(n+1) + \frac{1}{2} \ln(U_n) + \frac{1}{2} \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{2} \ln(U_n) + \frac{1}{2} \ln(n) = \frac{1}{2} \ln(n \times U_n) \\ &= \frac{1}{2} \ln(V_n) = \ln(V_n^{\frac{1}{2}}) \\ \text{ومنه } V_{n+1} &= V_n^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- استنتاج أن المتتالية (W_n) هندسية.
 $W_{n+1} = \ln(V_{n+1}) = \ln(V_n^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln(V_n) = \frac{1}{2} W_n$
ومنه المتتالية (W_n) هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$.

(3) بما أن $r = \frac{1}{2}$ فإن المتتالية (W_n) متقاربة نحو الصفر
بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$ و $W_n = \ln(V_n)$
فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1$
لأن $U_n = V_n \times \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} W_1 &= \ln(V_1) = \ln(U_1) = \ln(2) \quad ; \quad S_n = W_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (4) \\ S_n &= \ln(2) \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -2 \ln(2) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right] \end{aligned}$$

(3) (أ) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ لأن $\frac{1}{2} > 0$

(ب) بما أن $\ln(e^2) = 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(U_n)$ و $\ln(e^2) = 2$
والنات $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^2$ متزايدة تماما فإن $x \mapsto \ln x$

تطبيق 39

الدوال اللوغاريتمية والمتتاليات

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \geq 1$ بـ $U_1 = 2$
و $\ln(U_{n+1}) = \frac{1}{2} \left[\ln(U_n) + \ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) \right]$
(1) بين أن هذه المتتالية معرفة وأن جميع حدودها أصغر من أو يساوي 2.
(2) من أجل كل $n \geq 1$ نعرف المتتاليتين (V_n) و (W_n) بـ $V_n = n \times U_n$ و $W_n = \ln(V_n)$
أوجد العلاقة بين V_{n+1} و V_n ثم استنتج أن المتتالية (W_n) هندسية يطلب تعيين أساسها r .
(3) بين أن المتتالية (W_n) متقاربة ثم استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو نهاية يطلب إيجادها.
(4) احسب المجموع $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ ثم استنتج عبارة الجداء $Q_n = U_1 U_2 \dots \times U_n$ حيث $Q_n = V_1 V_2 \dots \times V_n$
(ب) ادرس نهايات المتتاليات (S_n) ، (Q_n) ، (π_n) .

✓ الحل

(1) الدالة $x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2}$ متناقصة تماما على المجال $[1, +\infty[$

وبالتالي من أجل كل x من $[1, +\infty[$ لدينا $\frac{1}{2} > \frac{x}{(x+1)^2} > 0$

ومنه ينتج $\frac{1}{2} > \frac{n}{(n+1)^2} > 0$

نريد إثبات أن من أجل كل $n \geq 1$ يكون $0 < U_n \leq 2$ ، نبرهن على هذه الخاصية بالتراجع
نسوي الخاصية $(0 < U_n \leq 2)$
 P_1 صحيحة لأن $0 < U_1 \leq 2$

نفرض أن P_n صحيحة أي $0 < U_n \leq 2$ ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $0 < U_{n+1} \leq 2$
بما أن $0 < U_n \leq 2$ و $\frac{1}{2} > \frac{n}{(n+1)^2} > 0$ فإن $1 \geq U_n \times \frac{n}{(n+1)^2} > 0$

$$S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

$$S_n = \ln(V_1) + \dots + \ln(V_n)$$

$$S_n = \ln(V_1 \times \dots \times V_n) = \ln(\pi_n)$$

$$\pi_n = e^{S_n} = e^{-2 \ln(2) \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]}$$

$$\pi_n = (1 \times U_1)(2 \times U_2) \times \dots \times (n \times U_n)$$

$$\pi_n = (1 \times 2 \times \dots \times n)(U_1 \times \dots \times U_n)$$

$$Q_n = \frac{\pi_n}{n!} \quad \text{ومنه} \quad \pi_n = (n!) Q_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \ln(2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{S_n} = e^{2 \ln(2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi_n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = e^{2 \ln(2)} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

تطبيق 40 الدوال اللوغاريتمية والتنايات

f دالة معرفة على المجال $]e+1, +\infty[$ بـ $I =]e+1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x-1)} + 1$

- (1) عيّن اتجاه تغير الدالة f
- (ب) عيّن نهاية f على أطراف المجال I
- (ج) برهن أنه إذا كان $x > e+1$ فإن $f(x) > e+1$
- (2) تعرف التنايات (U_n) بـ $U_0 = e^2 + 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1} = f(U_n)$
- (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > e+1$
- (ب) برهن أن التنايات (U_n) متناقصة
- (ج) استنتج أن (U_n) متقاربة نحو e ثم عيّن e

الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]e+1, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{\ln(x-1)-1}{[\ln(x-1)]^2}$

بما أن $x > e+1$ فإن $x-1 > e$

ومنه $1 < \ln(x-1)$ إذن $f'(x) > 0$ على المجال $]e+1, +\infty[$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $]e+1, +\infty[$

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow e+1} f(x) = e+1$

(ج) بما أن الدالة f متزايدة تماماً على $]e+1, +\infty[$

فإنه إذا كان $x > e+1$ يكون $f(x) > f(e+1)$ أي $f(x) > e+1$

(أ) نسمي P_n الخاصية $(U_n) > e+1$

P_0 صحيحة لأن $U_0 = e^2 + 1$ و $U_0 > e+1$

نفرض أن P_n صحيحة أي $U_n > e+1$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > e+1$

بما أن $U_n > e+1$ و f متزايدة تماماً على $]e+1, +\infty[$

فإن $f(U_n) > f(e+1)$ أي $U_{n+1} > e+1$

ومنه P_{n+1} صحيحة

وبالتالي P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) بما أن f متزايدة تماماً على $]e+1, +\infty[$ فإن (U_n) زمنية

ولتعيّن نوع الرتبة نحسب $U_1 - U_0$

إذا كان $U_1 - U_0 > 0$ نقول أن (U_n) متزايدة

وإذا كان $U_1 - U_0 < 0$ نقول أن (U_n) متناقصة

$$U_1 - U_0 = \frac{U_0 - 1}{\ln(U_0 - 1)} + 1 - U_0 = -\frac{1}{2} e^2 < 0$$

ومنه (U_n) متناقصة

(ج) بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو e حيث e حل لـ $x = f(x)$

$x = f(x)$ يكافئ $x = 1$ أو $x = e+1$

بما أن $]e+1, +\infty[\ni 1$ فإنه مرفوض وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e+1$

تطبيق 41

PH الكيمياء

في الكيمياء الرمز PH يعني كمون الهيدروجين

PH يسمح لنا بالتعبير عن الطبيعة الحمضية أو الأساسية لمحلول مائي

إذا كانت $[H_3O^+]$ تمثل تركيز شوارد الهيدروجين بالمول

$$PH = -\text{Log} [H_3O^+]$$

$$PH = -\log [H_3O^+] = -\log (3,2 \times 10^{-6}) = 5,494 \quad (1)$$

بما أن $PH > 7$ فإن هذا المحلول حمضي.

$$PH = -\log (4 \times 10^{-8}) = 7,40 \quad (2) \quad [H_3O^+] = 4 \times 10^{-8}$$

بما أن $PH > 7$ فإن هذا المحلول قاعديته ضعيفة.

تطبيق 12

حل المعادلات والمراجعات

حل في IR المعادلات والمراجعات التالية:

$$\begin{aligned} (1) \quad 7^{x-2} &= 5^x \quad (ب) \quad 5^x \geq 4 \quad (ج) \quad \frac{3^x}{3^x+1} < \frac{1}{4} \\ (2) \quad 2^{4x-2} - 2^{2x} - 3 &= 0 \quad (هـ) \quad 4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0 \quad (و) \quad 5^{x+1} + 2 \times 5^{-x} = 7 \end{aligned}$$

الحل

$$(1) \quad 7^{x-2} = 5^x \quad \text{تكافئ} \quad (x-2) \ln(7) = x \ln(5) \quad \text{يكافئ} \quad x = \frac{2 \ln(7)}{\ln(7) - \ln(5)}$$

$$(ب) \quad 5^x \geq 4 \quad \text{يكافئ} \quad x \ln(5) \geq \ln(4) \quad \text{يكافئ} \quad x \geq \frac{\ln(4)}{\ln(5)}$$

$$\text{ومنه مجموعة حلول المراجعة } 5^x \geq 4 \text{ هي } S = \left[\frac{\ln(4)}{\ln(5)}, +\infty \right[$$

$$(ج) \quad \frac{3^x}{3^x+1} < \frac{1}{4} \quad \text{يكافئ} \quad 4 \times 3^x < 3^x+1 \quad \text{يكافئ} \quad x \leq -1 + \frac{1}{\ln(3)}$$

$$\text{ومنه مجموعة حلول المراجعة (ب) هي } S =]-\infty, -1 + \frac{1}{\ln(3)}]$$

$$(د) \quad \text{المعادلة (د) تكتب } 2^{2x} - 2^{2x} - 3 = 0 \quad \text{ووضع } X = 2^{2x}$$

$$\text{تصبح } 2^{-2}X^2 - X - 3 = 0 \quad \text{وحل هذه الأخيرة هما } -4 \text{ و } 12$$

$$X_2 \text{ مرفوض لأنه سالب و } X_1 \text{ مقبول}$$

$$X = X_1 \quad \text{تكافئ} \quad x = \frac{\ln(12)}{\ln(4)} \quad \text{ومنه} \quad S = \left\{ \frac{\ln(12)}{\ln(4)} \right\}$$

$$(هـ) \quad \text{المراجعة (هـ) تكتب على شكل } (2^x)^2 + 2 \times 2^x - 3 \leq 0$$

$$\text{ووضع } X = 2^x \quad \text{تصبح } X^2 + 2X - 3 \leq 0$$

$$\text{المعادلة } X^2 + 2X - 3 = 0 \quad \text{حلان هما } 1 \text{ و } -3$$

$$(1) \quad \text{من أجل محلول حمضي لدينا } PH > 7 \quad \text{استنتج تركيز } [H_3O^+]$$

$$(2) \quad \text{من أجل محلول قاعدي (أساسي) لدينا } PH > 7 \quad (14)$$

$$\text{استنتج تركيز } [H_3O^+] \text{ لهذا المحلول القاعدي.}$$

$$(3) \quad \text{ماء معيضي غازي يحمل إشارة } PH = 6,5 \quad \text{ما هو تركيزه بشوارد } [H_3O^+]$$

$$(4) \quad \text{متوسط تركيز } [H_3O^+] \text{ في بول لأكلات اللحوم هو } 32 \times 10^{-6}$$

$$\text{مول على اللتر. احسب } PH \text{ هذا المحلول. ماذا تستنتج ؟}$$

$$(5) \quad \text{إذا علمت أن تركيز } H_3O^+ \text{ في الدم هو } 4 \times 10^{-8} \text{ مول على اللتر،}$$

$$\text{بين أن الدم له طبيعة قاعدية ضعيفة.}$$

الحل

$$(1) \quad PH > 7 \quad \text{هذا يعني } 1 > -\log [H_3O^+] \quad \text{أي } 1 > \log \left[\frac{1}{[H_3O^+]} \right]$$

$$\text{بما أن الدالة } x \mapsto 10^x \text{ متزايدة تمامًا فإنه ينتج } 10^1 > \left[\frac{1}{[H_3O^+]} \right]$$

$$\text{بالقلب نجد } 10^{-7} > [H_3O^+] > 10^{-1}$$

$$(2) \quad PH > 7 \quad (14) \quad \text{هذا يعني } 14 > -\log [H_3O^+] \quad (14)$$

$$14 > -\log [H_3O^+] \quad \text{منه نستنتج } 10^{14} > \left[\frac{1}{[H_3O^+]} \right]$$

$$\text{بالقلب نجد } 10^{-14} > [H_3O^+] > 10^{-7}$$

$$(3) \quad PH = -\log [H_3O^+] \quad \text{منه} \quad PH = \log \left[\frac{1}{[H_3O^+]} \right] = 10^{PH}$$

$$\text{بالقلب نجد } [H_3O^+] = 10^{-PH} \quad \text{أي } [H_3O^+] = 10^{-6,5}$$

وبالتالي $X^2 + 2X - 3 = (X+3)(X-1)$ إذن $(2^x)^2 + 2 \times 2^x - 3 = (2^x+3)(2^x-1)$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $2^x + 3 > 0$

ومنه إشارة $(2^x)^2 + 2 \times 2^x - 3$ هي نفس إشارة $(2^x - 1)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $2^x - 1$	-	0	+
إشارة $(4^x + 2^{x+1} - 3)$	-	0	+

من الجدول المجاور نستنتج أنه إذا كان

$x \leq 0$ فإن $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$ ومنه

مجموعة حلول المراجعة

$S =]-\infty, 0]$ هي $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

(و) بضرب طرفي المعادلة (و) في العدد 5^x نجد $5^{2x+1} + 2 = 7 \times 5^x$ بالتبسيط نجد

$5^{2x+1} - 7 \times 5^x + 2 = 0$ وبوضع $X = 5^x$ تصبح $5X^2 - 7X + 2 = 0$.

حلا المعادلة $5X^2 - 7X + 2 = 0$ هما 1 و $\frac{2}{5}$.

$X = 1$ يكافئ $5^x = 1$ تكافئ $x = 0$

$X = \frac{2}{5}$ يكافئ $5^x = \frac{2}{5}$ يكافئ $x = \frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln(5)}$

إذن مجموعة حلا المعادلة (و) هي $S = \left\{ \frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln(5)}, 0 \right\}$

تطبيق 48 حل جملة معادلتين

حل في \mathbb{R}^2 الجملتين التاليتين:

$$\begin{cases} 5^x \times 5^y = 25 \\ 5^x + 5^y = \frac{626}{5} \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} x+y=3 \\ 2^x \times 3^y = 18 \end{cases} \quad (ا)$$

الحل

$$\begin{cases} x+y=3 \dots (1) \\ 2^x \times 3^y = 18 \dots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد $y = 3 - x$ نعوض y في (2) نجد $2^x \times 3^{3-x} = 18$

ومنه نستنتج $\ln(2^x) + \ln(3^{3-x}) = \ln(18)$ أي $x \ln(2) + (3-x) \ln(3) = \ln(18)$

بالتبسيط نجد $x \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ومنه نجد $x = 1$.

نعوض قيمة x في عبارة y نجد $y = 2$
إذن مجموعة حلول الجملة (ا) هي $S = \{(1, 2)\}$.

(ب) بوضع $5^x = X$ و $5^y = Y$

$$(i) \dots \begin{cases} XY = 25 \dots (1) \\ X+Y = \frac{626}{5} \dots (2) \end{cases}$$

من المساواة $XY = 25$ نجد $Y = \frac{25}{X}$

وبتعويض عبارة Y في المعادلة (2) نجد $X + \frac{25}{X} = \frac{626}{5}$

بالتبسيط نجد $5X^2 - 626X - 125 = 0$

$$X_1 = \frac{626 + \sqrt{395436}}{10} \quad X_2 = \frac{626 - \sqrt{395436}}{10}$$

X_2 سالب فهو مرفوض و X_1 موجب فهو مقبول.

$X = X_1$ يكافئ $5^x = X_1$ يكافئ $x = \frac{\ln(X_1)}{\ln(5)}$

بتعويض قيمة X في عبارة Y نجد $Y = \frac{25}{X_1}$

$Y = \frac{25}{X_1}$ يكافئ $5^y = \frac{25}{X_1}$ يكافئ $y = \frac{\ln\left(\frac{25}{X_1}\right)}{\ln(5)}$

إذن مجموعة حلول المراجعة (ب) هي $S = \left\{ \left(\frac{\ln(X_1)}{\ln(5)}, \frac{\ln\left(\frac{25}{X_1}\right)}{\ln(5)} \right) \right\}$

تطبيق 49 رسم التمثيل البياني لدالة

ك دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = (2-x)2^x$

ادرس تغيرات f . ثم ارسم (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

الحل

$$f(x) = (2-x)e^{x \ln(2)} \quad \text{منه} \quad 2^x = e^{x \ln(2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2e^{x \ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} (x \ln(2)) e^{x \ln(2)} \right] = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (Ln 2) x e^{x/Ln 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ مع $X = x Ln 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x/Ln 2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = (-x Ln(2) - 1 + 2 Ln 2) e^{x/Ln 2}$

$f''(x) = 0$ يكافئ $x = \frac{-1 + 2 Ln 2}{Ln 2} = \alpha$

- إذا كان $x = \frac{-1 + 2 Ln 2}{Ln 2}$

فإن $f'(x) < 0$

- إذا كان $x < \frac{-1 + 2 Ln 2}{Ln 2}$

فإن $f'(x) > 0$

$\frac{-1 + 2 Ln 2}{Ln 2} \approx 0,56$

و $f\left(\frac{-1 + 2 Ln 2}{Ln 2}\right) \approx 2,1$

المنحنى (C_f) يقطع $(x'x')$

في النقطة $A(2, 0)$

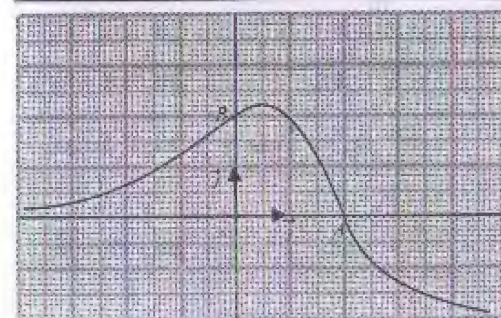
المنحنى (C_f) يقطع $(y'y')$

في النقطة $B(0, 2)$

يمكن التأكد من أن المنحنى (C_f)

له نقطة انعطاف قاصبتها أكبر 2

x	$-\infty$	$\frac{-1 + 2 Ln 2}{Ln 2}$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f		$f(\alpha)$	



تطبيق 45

إيجاد عدد حلول المعادلة $x^3 = (1,5)^x$

(1) بين أنه من أجل كل $x > 0$ المساواة $x^3 = (1,5)^x$ تكتب على الشكل:

$$(1) \quad \frac{Ln(x)}{x} = \frac{Ln(1,5)}{3}$$

(2) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{Ln x}{x}$

بين أن للمعادلة $f(x) = \frac{Ln(1,5)}{3}$ حلين موجبين فقط.

الحل

(1) من المساواة $x^3 = (1,5)^x$ ينتج $Ln(x^3) = Ln(1,5)^x$

وباستعمال خواص الدالة Ln نجد $3 Ln x = x Ln(1,5)$

ومنه ينتج $\frac{Ln(x)}{x} = \frac{Ln(1,5)}{3}$

$D_f =]0, +\infty[$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x - Ln x}{x^2} = \frac{1 - Ln x}{x^2}$$

الدالة f متناقصة تماما على

$]e, +\infty[$ و متزايدة تماما على $]0, e[$

x	0	e	$+\infty$
f'		+	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

(ب) بما أن $f'(x) > 0$ على $]0, e[$ و $\frac{Ln(1,5)}{3} \in]-\infty, \frac{1}{e}[$

فإن للمعادلة $f(x) = \frac{Ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا α ينتمي إلى $]0, e[$.

بما أن $f'(x) < 0$ و $\frac{Ln(1,5)}{3} \in]0, \frac{1}{e}[$

فإن للمعادلة $f(x) = \frac{Ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا β ينتمي إلى $]e, +\infty[$.

حل معادلات ومراجعات

تطبيق 45

حل المعادلات والمراجعات والجميل الثانية

$$(1) \quad x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2 = 0 \quad (2) \quad x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = y^2 \\ x = y^3 \end{cases} \quad (3)$$

الحل

(1) بوضع $X = x^{\frac{1}{3}}$ فإن للمعادلة (1) تصبح $X^2 - 3X + 2 = 0$ وحلاهما هما 1 و 2.

$X = 1$ يكافئ $x^{\frac{1}{3}} = 1$ يكافئ $x = 1$

$X = 2$ يكافئ $x^{\frac{1}{3}} = 2$ يكافئ $x = 8$

منه مجموعة حلول للمعادلة (1) هي $S = \{1, 8\}$

(2) بوضع $X = x^{\frac{1}{3}}$ التراجعة (2) تكتب على الشكل $(X-1)(X-2) > 0$

ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

وبما أن التالة $x \rightarrow x^3$ متزايدة تماما على \mathbb{R} فإن $x \in]-\infty, 1[\cup]8, +\infty[$

و بالتالي مجموعة حلول التراجعة (2) هي $S =]-\infty, 1[\cup]8, +\infty[$

(3) الجملة لها معنى إذا وفقط إذا كان $x > 0$ و $y > 0$.

الجملة تكتب على شكل $\begin{cases} e^{y^2 \ln(y)} = e^{y \ln(y^2)} \\ x = y^2 \end{cases}$ وهذه الأخيرة تكتب

ومنه $\begin{cases} e^{y^2 \ln(y)} - 2y \ln(y) = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$ وبالتبسيط نجد $(y^2 - 2y) \ln(y) = 0$ و $x = y^2$.

حلول المعادلة $(y^2 - 2y) \ln(y) = 0$ هي $(y=2)$ أو $(y=1)$.

إذا كان $y=2$ فإن $x=4$ وإذا كان $y=1$ فإن $x=1$.

ومنه مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S = \{(4, 2), (1, 1)\}$.

تطبيق 47

الدوال اللوغاريتمية والأسية

الف دالة معرفة بـ $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم

متعامد ومتجانس.

(1) برر صحة كل من المعلومات التالية

(أ) f معرفة على \mathbb{R} .

(ب) من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.

(ج) المنحنى (γ) يقبل المستقيم $y = 2x$ كـ مستقيم مقارب مائل

بجوار $(+\infty)$.

(د) المنحنى (γ) يقبل مماسا وحيدا موازيا لمحور الترتيب.

(2) ارسم (د) و (γ) و المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

الحل

(1) أ) f معرفة إذا وفقط إذا كان (1) ... $e^{2x} - e^x + 1 > 0$

بوضع $X = e^x$ التراجعة (1) تكتب $X^2 - X + 1 > 0$.

ممميز $X^2 - X + 1$ هو $\Delta = -3$

(0) Δ منه إشارة $(X^2 - X + 1)$ هي من إشارة معامل X^2 أي موجبة تماما.

بالتالي $e^{2x} - e^x + 1 > 0$ إذن $D_f = \mathbb{R}$.

(ب) من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f(x) = \ln e^{2x} (1 - e^{-x} + e^{-2x}) = \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$= 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 0$$

إذن $y = 2x$: (د) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$.

$$(د) \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا } f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

$$f'(x) = 0 \text{ تكافئ}$$

$$e^x (2e^x - 1) = 0$$

$$x = -\ln(2)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة

$$(2e^{2x} - e^x)$$

بما أن $f'(x)$ يندمج عند

$$-\ln(2) \text{ مغيرا إشارته في جوار } -\ln(2)$$

فإن المنحنى (γ) له مماس يوازي محور الترتيب

عند النقطة ذات الفاصلة $-\ln(2)$

(2) المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

$$\text{معادلته } y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\text{بالتعويض نجد } y = x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(-\ln(2)) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,28$$

x	$-\infty$	$-\ln(2)$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	+
تغيرات f		0	$+\infty$



الدوال اللوغاريتمية والأسية

تطبيق 48

الف دالة معرفة بـ $f(x) = \ln(x + e^{-x})$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد

ومتجانس.

(1) أ) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $x + e^{-x} \geq 1$

(ب) استنتج أن f معرفة على \mathbb{R} .

(2) اتحقق من صحة المعلومات التالية:

- من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$

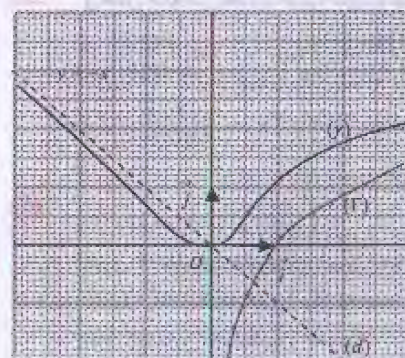
- من أجل كل $x > 0$ لدينا $f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$

و منه $y = -x$ (d) مقارب مائل بجوار $(-\infty)$ لـ (y)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right) = 0 \quad (3)$$

نستنتج أنه بجوار $(+\infty)$ للنحني (f) الممثل للدالة \ln مقارب للمنحني (y).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	$+\infty$	0	$+\infty$



(4) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

ولدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-e^{-x})$
 $f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$

إذا كان $x > 0$
 فإن $f'(x) > 0$
 و منه f متزايدة تماماً
 على $[0, +\infty[$
 إذا كان $x < 0$
 فإن $f'(x) < 0$
 و منه f متناقصة تماماً
 على $]-\infty, 0]$
 المنحني (y) يقع تحت (d)
 من أجل كل $x < 0$

(ب) عين نهايات الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(ج) استنتج من السؤال السابق أن السنتيم (d) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (y) بجوار $(-\infty)$.

(3) ماهي نهاية $[f(x) - \ln(x)]$ عند $(+\infty)$ ماذا تستنتج ؟

(4) ادرس تغيرات الدالة f مشكلاً جدول تغيراتها.

(5) ارسم (d) و (y) و (f) حيث (f) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$

✓ الحل

(1) نضع $g(x) = x + e^{-x} - 1$ ونبين أن $g(x) \geq 0$

و من أجل ذلك ندرس تغيرات الدالة g.

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = 1 - e^{-x}$

$g'(x) = 0$ تكافئ $e^{-x} = 1$ يكافئ $x = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) > 0$ منه g متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$.

إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) < 0$ منه g متناقصة تماماً على $]-\infty, 0]$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	-	0	+
تغيرات g	$+\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات نلاحظ أنه من أجل

كل عدد حقيقي x يكون $g(x) \geq 0$

أي $x + e^{-x} \geq 1$

(ب) بما أن من أجل كل x من \mathbb{R} :

$x + e^{-x} \geq 1$ فإن $x + e^{-x} \geq 0$ وهذا

يعني أن الدالة f معرفة على \mathbb{R} .

(2) من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f(x) = \ln(e^{-x}(1 + xe^x)) = \ln(e^{-x}) + \ln(1 + xe^x) = -x + \ln(1 + xe^x)$$

$$f(x) = \ln x \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) \quad \text{لدينا } (x > 0)$$

$$\text{منه } f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + \ln(1 + xe^x)] = +\infty \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + xe^x) = 0 \quad (\text{ج})$$

تمارين و مسائل



1- عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى في كل حالة من الحالات التالية:

- (أ) $\ln(2x+1)$ (ب) $\ln(-x^2)$ (ج) $\ln(x^2+4x-5)$
(د) $\ln(x^2-1) - \ln(2x+1)$ (و) $\ln(2+x)(x-1)$ (ي) $\ln(x^2+1) + \ln(x^2-1)$

2- في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة ذات معنى:

- (أ) $\ln\left(\frac{2x+3}{1-x}\right)$ (ب) $\ln\left(\frac{2x+3}{1-x}\right)$ (ج) $\ln(|x^2-1|-1)$
(د) $\frac{x+1}{\ln(x)-2}$ (و) $\frac{x}{[\ln x]^2+3\ln x-2}$ (ي) $\ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)$ (هـ) $\sqrt{\ln x}$

3- f دالة معرفة على المجال $]-2, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = ax^2 + bx + \ln(x+2)$ مع a و b عددين حقيقيين، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس. $A(-1, 2)$ نقطة من (C_f) بحيث المماس عندها يوازي مستقيم ميله 2. عين العددين الحقيقيين a و b .

4- (γ) المنحني البياني للدالة \ln في معلم متعامد و متجانس. M نقطة من (γ) فاصلتها m .
(1) أوجد بدلالة m معادلة المماس T للمنحني (γ) عند النقطة M .
(2) ابرهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $m > 0$ ، المماس T يقطع محور الترتيب في نقطة K إحداثيتها $(0, \ln(m)-1)$.

(ب) استنتج أنه إذا كانت II السقط العمودي لـ M على محور الترتيب فإن $KII = \vec{j}$
(ج) اعط عندك طريقة بسيطة لإنشاء المماس للمنحني (γ) عند النقطة M .

5- عين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة:

- (أ) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ (ب) $f(x) = x + \ln(x+1)$ (ج) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{-x+1}\right)$
(د) $f(x) = \ln(x^2+3x)$ (و) $f(x) = \ln(|x-1|)$ (ن) $f(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\right)$

6- حل المعادلات التالية:

- (أ) $2\ln x = \ln(-3x+4)$ (ب) $\ln(-x+3) = 2\ln 2$
(ج) $\ln(x^2-4x) = \ln(x+4)$ (د) $\ln(x^2-1) = 0$ (هـ) $\ln(x^2-1) = -1$
(و) $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2$ (ن) $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(21)$

7- حل التراجعات التالية:

- (أ) $\ln(x) - 3 \geq 0$ (ب) $\ln(x) > \ln(2-x)$ (ج) $\ln(2x-6) > 2$
(د) $\ln(x+3) + 2 < 0$ (هـ) $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > 1$ (و) $\ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) < 0$
(ن) $\ln(x-2) \leq \ln(3x-1)$ (ي) $\ln(5x) \leq \ln(x^2-x)$

8- في كل حالة من الحالات التالية عين المجموعة التي تكون فيها الدالة f معرفة:

- (أ) $f(x) = \sqrt{\ln(x)-2}$ (ب) $f(x) = \sqrt{\ln(2x)-5}$
(ج) $f(x) = \frac{1}{2\ln(x-1)+3}$ (د) $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2-1)-3}$
(هـ) $f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{2\ln x-6}$ (و) $f(x) = \ln(3-\ln x)$
(ن) $f(x) = \ln(\ln(x))$

9- (1) حل الجملة $\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 4x+7y=29 \end{cases}$ ثم استنتج حل الجملة:

$$\begin{cases} 3\ln(x) + 4\ln(y) = 21 \\ 4\ln(x) + 7\ln(y) = 29 \end{cases}$$

10- حل الجملتين التاليتين:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ \ln(x)+\ln(y)=3\ln(3) \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x-y=8 \\ \ln(x)-\ln(y)=2\ln(3) \end{cases} \quad (1)$$

11- ليكن $P(x)$ كثير حدود معرف بـ $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

(1) بين أن $P(1) = 0$ ثم حلل $P(x)$ إلى جداء عوامل ثم حل المعادلة $P(x) = 0$.

(2) حل المعادلة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$

(3) حل التراجحة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \geq 0$

12 - (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ $U_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(1) احسب نهاية (U_n)

(2) نضع $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ احسب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

13 - في كل حالة من الحالات التالية ادرس نهاية f عند المكان المعطى :

(أ) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ عند 0

ج) $f(x) = x+1 - \ln(x)$ عند $(+\infty)$ ، د) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \ln x$ عند $+\infty$ و 0

هـ) $f(x) = x + x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$ ، و) $f(x) = \frac{x \ln x}{x+2}$ عند 0

ي) $f(x) = 1 + x^2 - x^2 \ln x$ عند $+\infty$ ، ن) $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x-e}$ عند e

14 - ادرس نهاية الدالة f عند أطراف المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ، $I =]1, +\infty[$

ب) $f(x) = x(2 - \ln x)$ ، $I =]0, +\infty[$

ج) $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$ ، $I =]-\infty, -3[$

د) $f(x) = \frac{\ln(x)-3}{x}$ ، $I =]e^3, +\infty[$

هـ) $f(x) = \frac{x+2}{\ln x}$ ، $I =]1, +\infty[$

و) $f(x) = x+2 + \ln x - \ln(x^2+1)$ ، $I =]0, +\infty[$

ن) $f(x) = x^2 + x - x \ln x$ ، $I =]0, +\infty[$

ي) $f(x) = \sqrt{x} \ln(x) + 1$ ، $I =]0, +\infty[$

ع) $f(x) = x^2 - \ln(x^2+1)$ ، $I = \mathbb{R}$

15 - حل المعادلات التالية :

(أ) $\ln|x+3| + \ln|x-1| = 0$

ب) $\ln|x+3| + \ln|x-1| = \ln 8$

ج) $\ln|2x+7| + \ln|x+1| = 2 \ln|x+2|$

د) $\ln(x-2) - \ln(x) = \ln(\alpha)$

16 - حل المتراجحات و الجمل التالية :

$$(1) \quad 2(\ln|x|)^2 + 3\ln(x^2) - 5 < 0 \quad (2) \quad 3(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 \geq 0$$

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \ln(xy) = \frac{1}{2} \ln(3) \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} \ln(x) \ln(y) = 6 \\ \ln(xy) = 5 \end{cases}$$

17 - الدوال التالية معرفة على $I =]0, +\infty[$ ادرس تغيرات كل منها ثم ارسم منحناها البياني

(أ) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، ب) $f(x) = (\ln x)^2 + 1$ ، ج) $f(x) = \frac{2 - \ln x}{x}$

د) $f(x) = x+1 - \ln x$ ، هـ) $f(x) = x^2 - x + 1 + 3 \ln x$

18 - لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

ادرس تغيرات f ثم ارسم منحناها البياني.

19 - f و g دالتان معرفتان على المجال $I =]0, +\infty[$ بالعبارتين $f(x) = \ln(x+2)$ و $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$

و (C_f) و (C_g) منحناهما البيانيين في معلم متعامد و متجانس.

(1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ يكون $g(x) \leq f(x)$

(2) برهن أن (C_f) و (C_g) لهما مماس مشترك عند النقطة ذات الفاصلة $x = -1$

ثم ارسم (C_f) و (C_g) .

20 - f دالة معرفة على $I =]0, +\infty[$ بالعبارتين $f(x) = x+2 + \ln\left(\frac{x}{x+3}\right)$

(1) برهن أن الدالة f متزايدة تماماً على I

(2) برهن أن الاستقيم (d) ذا المعادلة $y = x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) في حوار $(+\infty)$

ب) عين وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (C_f) و (d) .

21 - نعتبر الدالة h المعرفة بالعبارتين $h(x) = x^2 + 1 - \ln x$

(1) ادرس تغيرات الدالة h ثم بين أن $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ واستنتج إشارة $h(x)$

(2) لتكن f دالة معرفة على $I =]0, +\infty[$ بالعبارتين $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

(أ) احسب $f'(x)$ ثم بين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ على $I =]0, +\infty[$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

- (ج) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ وعند الصفر ثم شكل جدول تغيرات f .
 (3) (أ) برهن أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) .
 (ب) حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (C_f) و (d) .

- 22 f دالة معرفة على $]2, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = x + 2 + \ln(x^2 - 4)$
 (1) برهن أن f متزايدة تماماً على I
 (2) (أ) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α في المجال I
 (ب) عين حصر α بتقريب 0,1.

- 23 f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ و $I =]0, +\infty[$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس
 (1) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) .
 (2) لتكن M_1, M_2, M_3, M_4 نقط من (γ) .
 M_1 نقطة تقاطع (γ) مع (xx') .
 M_2 نقطة من (γ) بحيث المماس عندها يمر من المبدأ.
 M_3 هي النقطة التي عندها المماس يوازي (xx') .
 M_4 هي النقطة التي عندها المماس الثاني لـ f ينعدم.
 (أ) احسب فواصل النقط M_1, M_2, M_3, M_4 .
 (ب) بين أن هذه الفواصل تمثل متتالية هندسية.

- 24 f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ و (γ) تمثيلها البياني

- (1) ادرس تغيرات f مشكلاً جدول تغيراتها.
 (2) (أ) نقطة من (γ) ذات الفاصلة A ، أوجد معادلة المماس (T) لـ (γ) عند A
 (ب) ارسم (T) ثم (γ) .
 (3) M نقطة من (γ) فاصلتها u . بين أن المماس (Tu) لـ (γ) عند النقطة M يوازي المستقيم ذي المعادلة $y=x$ إذا وفقط إذا كان $u^3 - 1 + 2 \ln(u) = 0$... (I)
 (4) بعد حل المعادلة (I) بين أن النقطة A هي النقطة الوحيدة من (γ) المماس فيها يكون موازي للمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

- 25 f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln(x) - \frac{3}{2} \right)$ و $f(0) = 0$

- (1) (أ) ما هي نهاية النسبة $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ لـ x يؤول 0
 (ب) استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

- (ج) ادرس تغيرات f مشكلاً جدول تغيراتها.
 (2) (γ) للنحن البياني للمثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس وحدة الطول 2cm.
 (أ) أوجد معادلة المماس (T) لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
 (ب) نريد في هذا السؤال دراسة الوضعية النسبية لـ (γ) و (T) .
 لتكن h دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعلاقة $h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$.
 ادرس إشارة $h'(x)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ ثم $h(x)$ على $]0, +\infty[$.
 (3) ارسم (T) و المماسات عند نقط تقاطع (γ) مع محور الفواصل و كنـ (γ) .

- 26 f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = x^2 + x - \frac{1 + \ln x}{x}$ و (γ) منحناها

- البياني في معلم متعامد.
 (1) g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعلاقة $g(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x$.
 ادرس تغيرات g على I ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α وأوجد العدد الطبيعي p بحيث $10^{-2} \geq \alpha \geq p \cdot 10^{-2}$.
 (2) عين نهاية f عند أطراف I .
 (أ) بين أنه من أجل كل x من I يكون $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. ادرس تغيرات الدالة f مشكلاً جدول تغيراتها.
 (ب) h دالة معرفة على I بالعلاقة $h(x) = x^2 + x$ و (p) منحناها البياني.
 ما هي نهاية $f(x) - h(x)$ عند $(+\infty)$ ؟ ثم ادرس الوضعية النسبية لـ (γ) و (p) .
 ارسم (p) و (γ) .

- 27 (I) g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعلاقة $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.

- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
 (2) احسب $g(1)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $]0, +\infty[$.
 ثم اعط حصر α بتقريب 0,01.
 (3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0, +\infty[$.

- (II) تعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$ وليكن (γ)

- التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.
 (1) ادرس نهاية f عند الصفر و $(+\infty)$.
 (2) بين أنه من أجل كل $x \in]0, +\infty[$ يكون $g(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$.
 ثم استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f .

(4) باستعمال السؤال (2) من (1) بين أن $\ln(\alpha) = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$ و $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ثم اعط حصرا لـ $f(\alpha)$ ثم ارسم (γ)

28 - k عدد حقيقي، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $[0, 1]$ بـ $f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx$ و (γ_k) منحناها البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

(I) نضع $k=0$.

(1) عين اتجاه تغير الدالة f_0 .

(2) احسب $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}}$ ثم $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(\ln u)^2}{u}$

(ب) استنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x)$

(ج) بوضع $f_0(0) = 0$ هل الدالة f_0 المعرفة بهذا الشكل قابلة للاشتقاق عند الصفر؟

(د) عين نهاية النسبة $\frac{f_0(x)}{x}$ لا x يؤول إلى الصفر ثم استنتج معادلة المماس عند

النقطة $O(0, 0)$ للمنحني (γ_0) ثم ارسم (γ_0) .

(II) (1) احسب $f'_k(x)$ من أجل $x \in]0, 1[$.

(ب) A_k نقطة من (γ_k) فاصلتها 1 بين أن المماس (T_k) لـ (γ_k) عند A_k هو (OA_k)

(2) (1) ادرس نهاية f_k عند الصفر وهذا باخذ $f_k(0) = 0$.

(ب) أوجد معادلة المماس لـ (γ_k) عند النقطة O .

29 - (I) f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$

(1) لتكن g دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ $g(x) = \ln(x) + x + 1$

الدرس تغيرات g ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ لها حلا وحيدا β بحيث $0, 27 \leq \beta \leq 0, 28$.

(2) (1) من أجل كل $x > 0$ أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ مستنتجا تغيرات f .

(ب) عين نهاية الدالة f عند أطراف $[0, +\infty[$.

(II) نعتبر المعادلة (I) $f(x) = n$ و n عدد طبيعي غير معلوم.

(1) بين أن المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا α_n .

(2) (1) بين أن $f(e^n) \leq n$ ثم استنتج أن $\alpha_n \geq e^n$.

(ب) بين أن العلاقة $f(\alpha_n) = n$ تكتب على الشكل $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$ (2)

ثم استنتج باستعمال السؤال (1) نهاية $\frac{\alpha_n}{e^n}$ لا n يؤول إلى $(+\infty)$

(3) نكتب $\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon_n)$ مع $\varepsilon_n \geq 0$.

(1) باستعمال المساواة (2) اكتب $\ln(1 + \varepsilon_n)$ بدلالة n .

(ب) بين أنه من أجل $t \geq 0$ يكون $0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$

(ج) استنتج من (1) و (ب) أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون

$$\varepsilon_n \leq ne^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{(\varepsilon_n)^2}{2} \quad (3)$$

(د) من (2) و (3) عين نهاية $e^n + n - \alpha_n$ لا n يؤول إلى $(+\infty)$.

30 - (U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 0$ و من أجل $n \geq 0$ يكون $U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n}$

(1) احسب U_1, U_2, U_3 و عبر عن هذه الحدود بواسطة كسر غير قابل للاختزال.

(2) قارن بين الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية بالنسبة إلى الحدود الأربعة الأولى لـ (V_n)

المعرفة بـ $V_n = \frac{n}{n+1}$

(3) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل $n \geq 0$ يكون $U_n = V_n$.

(4) (W_n) متتالية معرفة بـ $W_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(1) بين أن $W_1 + W_2 + W_3 = -\ln(4)$

(ب) $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ المجموع العرف بـ S_n

اكتب S_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

31 - نريد دراسة تقارب المتتالية $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

(1) ادرس تغيرات الدالتين f و g اللعرفتين على $[1, +\infty[$ بـ

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \quad \text{و} \quad g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

ثم استنتج أن $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$

(2) نضع $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

(1) تحقق أنه من أجل $n \geq 1$ يكون $U_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq U_n$

(ب) استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

(3) (1) لتكن الدالة K المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ $K(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

فسر هندسيا العدد S_n حيث $S_n = U_{n-1} - \ln n$

(ب) من السؤال (1) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $0 \leq K(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(ج) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 2$ يكون $S_n = K(1) + K(2) + \dots + K(n-1)$

ثم استنتج ان المتتالية (S_n) متزايدة ومن اجل كل $n \geq 2$ يكون $S_n < 1 - \frac{1}{n}$ و $K(1) < S_n$.

(د) استنتج من (ج) ان (S_n) متقاربة نحو l يطلب تعيينه.

32 - بعد قياس طول اطفال اعمارهم تتراوح ما بين 3 اشهر و 6 سنوات نمذجنا العلاقة

بين السن x بالسنوات و الطول $K(x)$ (cm) بالدالة K التالية ،

$$K(x) = 71,23 + 6,13x + 8,7 \log x$$

(ا) ادرس تغيرات الدالة K على المجال $[0,25, 6]$.

(ب) ما هي الزيادة في الطول ما بين سنة و سنتين ؟

(ج) ارسم المنحنى البياني للدالة K في المجال $[0,25, 6]$.

33 - نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = (|x|)^x, x \neq 0$ و $f(0) = 1$.

(1) بين ان هذه الدالة مستمرة على IR و قابلة للاشتقاق على $IR - \{0\}$.

(2) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحنائها البياني في معلم متعامد و متجانس.

34 - نعتبر الدالة f المعرفة على IR_+^* بـ $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) عين معادلة للمماس (T) لـ (γ) في النقطة ذات الفاصلة 0 ثم ارسم (γ) و (T) .

35 - n عدد طبيعي غير معدوم و f_n الدوال المعرفة على IR بـ $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

و (γ_n) منحنائها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) ادرس تغيرات الدوال f_1, f_2, f_3 مع إعطاء العدد المشتق عند الصفر.

(2) بين ان جميع المنحنيات (γ_n) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينها.

(3) ادرس تغيرات الدوال f_n في حالة n زوجي و في حالة n فردي.

(4) قارن بين الوضع النسبي لـ (γ_n) و (γ_{n+1}) على $[0, +\infty[$ و (γ_n) و (γ_{n+2}) على $]-\infty, 0]$ و مثل عندئذ $(\gamma_1), (\gamma_2), (\gamma_3)$ في نفس المعلم.

(II) من اجل كل $x > 0$ نضع $u(x) = x \ln(x) - x$ ادرس تغيرات u .

(2) دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ $g(x) = e^{u(x)}, x > 0$ و $g(0) = 1$.

(1) تحقق انه من اجل كل $x > 0$ يكون $\frac{g(x)-1}{x} = \frac{e^{u(x)}-1}{u(x)} \times (Ln(x)-1)$.

(ب) بين ان الدالة g مستمرة عند الصفر و لكن غير قابل للاشتقاق عند 0.

(ج) ادرس تغيرات g .

(د) احسب $g(e)$ ثم حل التراجحة $g(x) \geq 1$ في المجال $]0, +\infty[$.

(3) من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نسمي النقطة ذات إحداثيتي $(n, f_n(n))$.

(ا) تحقق ان النقطة M_n نقطة من المنحنى البياني للدالة g ثم ارسم هذا المنحنى.

(4) عين حسب قيم n عدد حلول المعادلة $f_n(x) = 1$ على IR .

36 - n عدد طبيعي و f_n دالة معرفة على $[0,1]$ بـ $f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}} \times (1-x)^{\frac{1}{2}}$ و (γ_n) منحنائها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) بين ان (γ_0) نصف دائرة نصف قطرها $r = \frac{1}{2}$ و مركزها ω يطلب تعيينه.

(2) في هذا السؤال نفرض ان $n \geq 1$

(ا) من اجل كل x من $]0,1[$ احسب $f'_n(x)$ مبينا ان $f'_n(x)$ و $\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) - (n+1)x \right]$ لهما نفس الإشارة.

(ب) هل الدالة f_n قابلة للاشتقاق عند الصفر و الواحد. شكل جدول تغيرات f_n .

(3) (ا) ادرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ لـ $1 \geq x \geq 0$ و $n \geq 1$.

(ب) استنتج الوضعية النسبية للمنحنيات (γ_n) و (γ_{n+1}) .

(ج) ارسم في المعلم $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ للمنحنيات $(\gamma_0), (\gamma_1), (\gamma_2)$.